FONDO PIZZOFALCONE

21 E 50

7537

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine 5

24-B-13

NAZIONALE
B. Prov.
I
1961
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

Digitized by Google

B. Prov.
I
1961

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE.

Se trouve aussi :

A BORDEAUX,

CHEZ GASSIOT FILS AINÉ, LIBRAIRE,

FOSSÉS DE L'INTENDANCE, N° 61.

A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE,

RUE DE LA MADELEINE, N° 438.

IMPRIMERIE DE HUZARD COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

Digitized by Google

608161

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE;

PAR CLAIRAUT,

Des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse, de Russie, de Bologne et d'Upsal.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET CORRIGÉE.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1830

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE

DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains.

Pages.

1. Pour mesurer une longueur, on la compare à une longueur connue. . . . . 9.
2. La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, et par conséquent la mesure de la distance entre deux points. . . . . *Ib.*
3. Une ligne qui tombe sur une autre sans pencher sur elle d'aucun côté est perpendiculaire à cette ligne. 10
4. Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres. . . . 11

Pages.

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux. 11
5. Manière d'élever une perpendiculaire. . . . *Ib.*
6. Le cercle est la trace entière que décrit la pointe mobile d'un compas, pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe. 13
Le centre est le lieu de la pointe fixe. . . . 14
Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert. . . . . *Ib.*
Le diamètre est le double du rayon. . . . . *Ib.*
7. Manière d'abaisser une perpendiculaire. . . *Ib.*
8. Couper une ligne en deux parties égales . . 15
9. Faire un quarré ayant son côté. . . . . *Ib.*
10. Faire un rectangle dont la longueur et la largeur sont données. 16
11. Les parallèles sont des lignes toujours également distantes les unes des autres. . . . *Ib.*
Mener une parallèle à une ligne par un point donné. 17
12. La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base. . . . . *Ib.*
13. Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites. 19
Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites. 20
14. La diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux. . . . *Ib.*
Les triangles rectangles sont ceux qui ont

Pages.

deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre. 21

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base et même hauteur. . . . . *Ib.*

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base. . . . . *Ib.*

15. Les triangles qui ont même hauteur et même base ont des superficies égales. 22

17. Les triangles qui ont même base et qui sont renfermés entre les mêmes parallèles sont égaux en superficie. 23

18. Les parallélogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont parallèles. 24

On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base. . . . . *Ib.*

19. Les parallélogrammes qui ont une base commune et qui sont entre les mêmes parallèles sont égaux en superficie. 25

20. Les polygones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux et également inclinés les uns sur les autres. . . . . *Ib.*

21. Manière de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés 26

Le pentagone a cinq côtés, l'hexagone six, l'eptagone sept, l'octogone huit, l'ennéagone neuf, le décagone dix, etc. . . . . *Ib.*

22. Mesure de la surface d'un polygone régulier 27

Pages.

L'apothème est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés. 27

23. Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux. 28

Manière de le décrire. . . . . *Ib.*

26. Connaissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal. 30

27. Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre. 31

28. Manière de faire un angle égal à un autre. . 32

Deux côtés et l'angle compris étant donnés, le triangle est déterminé. . . . . *Ib.*

29. Seconde manière de faire un angle égal à un autre. 33

La corde d'un arc de cercle est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc. *Ib.*

30. Deux angles et un côté déterminent le triangle. 34

31. Le triangle isocèle est celui qui a deux côtés égaux. . . . . *Ib.*

Les angles que ses côtés font avec la base sont égaux entre eux. 35

34. En quoi consiste la ressemblance de deux figures. 38

36. Manière de faire une figure semblable à une autre. 39

38. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troi-

Pages.

sième angle de l'un égalera le troisième angle de l'autre. 41

39. Deux triangles dont les angles sont respectivement égaux ont leurs côtés proportionnels. 42

40. Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra. 44

41. Ce que c'est qu'une ligne quatrième proportionnelle à trois autres, et comment on la trouve. 45

42. Les hauteurs des triangles semblables sont proportionnelles à leurs côtés 46

44. Les aires des triangles semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues 47

45. Propriétés des figures semblables, tirées de celles des triangles. 48

47. Les aires des figures semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues. 50

48. Les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites 51

50. Manière de mesurer la distance d'un lieu inaccessible. 52

52. Un angle a pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés 54

53. Le cercle est partagé en 360 degrés ; chaque degré en 60 minutes, etc. . . . . *Ib.*

Pages.

54. L'angle droit a 90 degrés, et ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. 55
55. Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit. . . . . *Ib.*
56. Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit. 56
57. La somme des angles faits du même côté sur une ligne droite et qui ont le même sommet vaut 180 degrés. . . . . *Ib.*
58. Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point sont égaux, pris ensemble, à quatre droits. . . . . *Ib.*
59. Usage de l'instrument appelé *demi-cercle,* pour prendre la grandeur d'un cercle. . . *Ib.*
60. Usage du rapporteur pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés . . . 58
63. Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part et d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux parallèles. . . 61
Ces angles sont égaux. . . . . *Ib.*
64. La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits. . . . . *Ib.*
68. L'angle extérieur d'un triangle vaut les deux angles intérieurs opposés. 63
69. Un angle d'un triangle isocèle donne les deux autres . . . . . *Ib.*
70. Les angles d'un triangle équilatéral sont chacun de 60 degrés. 64

Pages.
71. Description de l'hexagone. 64
72. La moitié de l'angle au centre de l'hexagone donne l'angle au centre du dodécagone. 65
73. Partager un angle en deux également. . . . 66
74. Description des polygones de 24, 48, etc., côtés . . . . . *Ib.*
75. Description de l'octogone. . . . . *Ib.*
Et des polygones de 16, 32, etc., côtés. . . *Ib.*

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

1. Deux rectangles qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases. 70
5. Manière de changer un rectangle en un autre qui ait une hauteur donnée. 71
6. Seconde manière de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée. . . 72
7. On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second comme la hauteur du second à la hauteur du premier. 73
8. Si quatre lignes sont telles, que la première soit à la seconde comme la troisième à la quatrième, le rectangle formé par la pre-

Pages.

mière et par la quatrième sera égal à celui que forment la seconde et la troisième. . . . 74

9. Quatre quantités, dont la première est à la seconde comme la troisième à la quatrième, sont dites former une proportion. . 75

10. Des quatre termes d'une proportion le premier et le quatrième sont nommés *extrêmes;* on nomme *moyens* le second et le troisième. . . . . *Ib.*

11. Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. 76

12. Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre termes forment une proportion. . . . . *Ib.*

13. De là on tire la règle de trois. . . . . *Ib.*

On la manière de trouver le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont donnés. 76

16. Faire un quarré double d'un autre. 79

17. Faire un quarré égal à deux autres pris ensemble. 80

18. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est son grand côté. 82

Et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres. . . *Ib.*

19. D'où se tire une manière simple de réduire deux quarrés en un seul. 83

20. Si les côtés d'un triangle rectangle servent

Digitized by Google

Pages.

de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypoténuse égalera les deux autres prises ensemble. 83

21. Réduire plusieurs figures semblables à une seule. 84

23. Le produit qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-même est le quarré de ce nombre. 85

La racine d'un quarré est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le quarré. 86

24. Un nombre est multiple d'un autre lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement. . . 87

Le côté d'un quarré et sa diagonale sont incommensurables. 88

25. Autres lignes incommensurables. . . . . *Ib.*

27. Les triangles et les figures semblables ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés sont incommensurables. . . 90

28. Et ces figures sont toujours entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. 92

TROISIÈME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

1. La mesure du cercle est le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon. . . 96

Pages.

2. L'aire du cercle est égale à un triangle dont la hauteur est le rayon, et la base une droite égale à la circonférence. 96
4. Le diamètre d'un cercle ayant 7 parties, la circonférence en a près de 22 97
5. Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons 98
6. Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons . . . . . *Ib.*
7. Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypoténuse vaut les deux autres pris ensemble. 99
8. Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques. 100
Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne. 101
9. Le segment de cercle est un espace terminé par un arc et par sa corde. 102
La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment. . . . . *Ib.*
10. Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons et par l'arc qu'ils comprennent. 103
Sa mesure est celle du segment. . . . . *Ib.*
11. Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque. . . . . *Ib.*

Pages.

13 Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle on tire deux droites aux extrémités du diamètre, on aura un angle droit. 105

15. Tous les angles dont le sommet est à la circonférence et qui s'appuient sur le même arc sont égaux, et ont pour commune mesure la moitié de l'arc sur lequel ils s'appuient 108

18. La tangente au cercle est la ligne qui ne le touche qu'en un point. 110

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde et par la tangente. 111

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment. . . . . *Ib.*

19. La tangente est perpendiculaire au diamètre qui passe par le point d'attouchement. 112

21. Ce que c'est qu'un segment capable d'un angle donné. 113

Manière de faire un segment capable d'un angle donné. 114

22. Trouver la distance d'un lieu à trois autres dont les positions sont connues. . . . . *Ib.*

23. Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre. 116

24. Le quarré d'une perpendiculaire quelconque

Pages.

au diamètre d'un cercle est égal au rectangle des deux parties du diamètre . . . 118

25 Changer un rectangle en un quarré. . . . . *Ib.*

26. Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites 119

Manière de la trouver . . . . . *Ib.*

27. Autre manière 120

28. Changer une figure rectiligne en un quarré. *Ib.*

30 Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée 121

31. Faire un polygone qui soit en raison donnée avec un polygone semblable 122

32. Faire un cercle qui soit à un autre cercle en raison donnée 123

33. Si d'un point pris hors d'un cercle on tire deux lignes qui le traversent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures seront égaux . . . . . *Ib.*

34. Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la sécante par la partie extérieure 124

35. D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente. 125

Digitized by Google

Pages.

QUATRIÈME PARTIE.

De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

1. Le cube est une figure solide terminée par six quarrés : c'est la mesure commune des solides. 127
2. Le parallélépipède est un solide terminé par six rectangles. 128
Les plans parallèles sont ceux qui conservent toujours entre eux la même distance . . . *Ib.*
3. Mesure du parallélépipède. 129
4. Les parallélépipèdes sont produits par un rectangle qui se meut parallèlement à lui-même. 130
5. La ligne perpendiculaire à un plan est celle qui ne penche d'aucun côté sur ce plan. . . 131
Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan. . . . . *Ib.*
6. La ligne qui est perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe. *Ib.*
8. Pratique simple pour élever ou pour abaisser des lignes perpendiculaires à des plans . . . 133
9. Une ligne sera perpendiculaire à un plan, si

Pages.

elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe. 134

10. Manière d'élever un plan perpendiculaire à un autre. . . . . *Ib.*

11. Mener un plan parallèle à un autre. . . . . *Ib.*

12. Mesurer l'inclinaison d'un plan sur un autre. 135

13. Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan. 136

14. Nouvelle manière d'abaisser une ligne perpendiculaire à un plan donné. 137

15. Seconde manière d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné . . . . . *Ib.*

16. Le prisme droit est une figure solide, dont les deux bases opposées sont deux polygones égaux et les autres faces des rectangles. 138

17. Formation des prismes droits. . . . . *Ib.*

19. Deux prismes qui ont des bases égales sont en même raison que leurs hauteurs. . . . 139

20. Deux prismes qui ont la même hauteur sont en même raison que leurs bases. . . . . *Ib.*

21. La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur 140

22. Les prismes obliques diffèrent des prismes droits, en ce que les faces qui sont des rectangles dans ceux-ci sont des parallélogrammes dans ceux-là. 141

Pages.

23. Formation des prismes obliques 141
24 Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. 142
25. Il en est de même des parallélépipèdes obliques, à l'égard des parallélépipèdes droits. 143
26. Les pyramides sont des corps renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet, et qui se terminent à une base polygone quelconque. 144
27. Elles retiennent le nom de leurs bases. . . *Ib.*
28. On les distingue en pyramides droites et en obliques. 145
32. En quoi consiste la similitude de deux pyramides. 148
37. Les pyramides qui ont même base et même hauteur sont égales. 151
38. Deux pyramides sont encore égales si, ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie 152
39. Les pyramides qui ont même hauteur sont entre elles comme leurs bases. 153
42. La solidité d'une pyramide quelconque est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur 157

Digitized by Google

Pages.

43. La pyramide est le tiers du prisme qui a même base et même hauteur. 158
45. Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées et parallèles, qui sont des cercles égaux, et par un plan plié autour de leurs circonférences. 159
On le distingue en cylindre droit et en cylindre oblique. . . . . *Ib.*
46. Formation du cylindre. . . . . *Ib.*
47. La surface courbe du cylindre droit est égale à un rectangle qui a la même hauteur, et dont la base est égale à sa circonférence. 160
49. Les cylindres qui ont même base et même hauteur sont égaux en solidité. 162
50. La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur. . . . . *Ib.*
51. Le cône est une espèce de pyramide dont la base est un cercle. . . . . *Ib.*
52. On le distingue en cône droit et en cône oblique. 163
53. La surface d'un cône droit se mesure en multipliant la moitié de son côté par la circonférence de sa base. . . . . *Ib.*
54. Le développement d'un cône est un secteur de cercle. 164
56. Les cônes qui ont même base et même hauteur sont égaux. 165

Pages.

57. Leur mesure est le produit de la base par le tiers de la hauteur. 165
59. Manière de mesurer la surface d'un cône tronqué. 166
60. La sphère est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre. 167
65. La surface de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence de son grand cercle. 173
66. Ce que c'est qu'un segment de sphère. . . . 174
Comment on mesure sa surface. . . . . *Ib.*
67. La surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit. 175
68. Les tranches du cylindre et de la sphère ont la même superficie. . . . . *Ib.*
69. La surface de la sphère est égale à quatre fois celle de son grand cercle. 176
70. La solidité de la sphère est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle. . . . . *Ib.*
71. La solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit. 177
72. Mesure de la solidité d'un segment de sphère. . . . . *Ib.*
73. En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans. 178
74. Conditions qui déterminent la similitude de deux cylindres droits 179

Pages.

75. Celle de deux cylindres obliques 179
76. Celle des cônes. . . . . *Ib.*
77. Celle de deux cônes tronqués. 180
78. Les sphères, les cubes, et toutes les figures qui ne dépendent que d'une seule ligne sont toutes semblables. . . . . *Ib.*
79. En général, les solides semblables ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles ils sont construits. . . . . *Ib.*
80. Les surfaces des solides semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. 181
81. Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons. 183
83. Les solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues 184
84. Les sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons. 185

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE.

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les élémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressans, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençans se fatiguent et se rebutent avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que, pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut faire pour la pratique; mais

par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre; car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvéniens, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençans. J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des commençans, puisque c'étaient des commençans qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie, et j'ai tâché d'en développer les principes par une méthode assez naturelle pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

Digitized by Google

La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie; et c'est, en effet, l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie *mesure de terrain*. Quelques auteurs prétendent que les Égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordemens du Nil, jetèrent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces auteurs, du moins ne saurait-on douter que dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et pour partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales; et s'étant enfin proposé de connaître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet ouvrage une route semblable à celle des inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux commençans les principes dont peut dépendre la simple mesure des terrains et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes les porte à s'y arrêter; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications : mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, c'est-à-dire de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers auteurs de Mathématiques

ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ça été sans doute pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes lecteurs à résoudre des problèmes, c'est-à-dire à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données et des grandeurs inconnues qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les commençans aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Élémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche d'observer que je ne passe légèrement que sur des propositions dont la vérité se découvre, pour peu qu'on y fasse at-

tention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencemens, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie se plaisaient à exercer un peu leur esprit, et qu'au contraire ils se rebutaient lorsqu'on les accablait de démonstrations pour ainsi dire inutiles.

Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé, on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et à dégoûter les lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourrait me faire,

ce serait d'avoir omis différentes propositions qui trouvent leur place dans les élémens ordinaires, et de me contenter, lorsque je traite des propositions, d'en donner seulement les principes fondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet; que les propositions que je néglige, sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, et qui d'ailleurs ne sauraient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit; qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matière que je traiterai plus à fond dans les Élémens d'Algèbre, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des terrains pour intéresser les commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Élémens avec les traités ordinaires d'Arpentage? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des terrains n'est point le véritable objet de ce livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire dé-

couvrir les principales vérités géométriques. J'aurais pu de même remonter à ces vérités, en faisant l'histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurais voulu choisir; mais alors la multitude des idées étrangères dont il aurait fallu s'occuper aurait comme étouffé les idées géométriques, auxquelles seules je devais fixer l'esprit du lecteur.

Digitized by Google

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

PREMIÈRE PARTIE.

Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains.

Ce qu'il semble qu'on a dû mesurer d'abord, ce sont les longueurs et les distances.

1.

Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une sorte de Géométrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une mesure connue à celle de la longueur qu'on veut connaître.

2.

A l'égard de la distance, on voit que pour

Digitized by Google

mesurer celle qui est entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, et que c'est sur cette ligne qu'il faut porter la mesure connue, parce que toutes les autres faisant nécessairement un détour plus ou moins grand, sont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

3.

Outre la nécessité de mesurer la distance d'un point à un autre, il arrive souvent qu'on est encore obligé de mesurer la distance d'un point à une ligne. Un homme, par exemple, placé en D sur le bord d'une rivière se propose de savoir combien il y a du lieu où il est à l'autre bord AB. Il est clair que, dans ce cas, pour mesurer la distance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, etc., qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or, il est aisé de voir que cette ligne la plus courte dont on a besoin est la ligne DC, qu'on suppose ne pencher ni vers A ni vers B. C'est donc sur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de *perpendiculaire*, qu'il faut porter la mesure connue pour avoir

Pl. 1re, fig. 1.

la distance DC du point D à la droite AB. Mais on voit aussi que pour poser cette mesure sur la ligne DC, il faut que cette ligne soit préalablement tirée. Il était donc nécessaire qu'on eût une méthode pour tracer des perpendiculaires.

4.

On avait encore besoin d'en tracer dans une infinité d'autres occasions. On sait, par exemple, que la régularité des figures telles que ABCD, FGHI, appelées *rectangles*, et composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, etc. Fig. 2 et 3.

La première ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément *quarré*. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

5.

Dans les différentes opérations qui demandent qu'on mène des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne d'un point

pris au dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

Fig. 4. Que du point C, pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD perpendiculaire à AB, il faudra que cette ligne ne penche ni vers A ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A et de B, et que la droite CD ne penche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A et de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à sa distance au point B; car alors, tirant par C et par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourrait le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit; il veut une méthode qui l'éclaire : la voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrain, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A

ou l'extrémité de la corde ou la pointe du compas, et, faisant tourner l'autre pointe ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM; puis, sans changer de mesure, vous opérerez de même par rapport au point B, et vous décrirez l'arc QDN, qui, coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc CD ne penchera ni vers A ni vers B; donc cette ligne sera perpendiculaire sur AB.

Si le point C ne se trouve pas à égale distance de A et de B, il faut prendre deux autres points *a* et *b*, également éloignés de C, et s'en servir, à la place de A et de B, pour décrire les arcs PDM, QDN. Fig. 5.

6.

Si une des traces, telle que PDM, était continuée en O, en E, en R, etc., jusqu'à ce qu'elle revînt au même point P d'où elle commence, la trace entière s'appellerait *circonférence du cercle,* ou simplement *cercle.* Fig. 4.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appelée *arc de cercle*;

Le point fixe A, son *centre*, ou celui du cercle;

Et l'intervalle AD, son *rayon*.

Toute ligne, comme DAE, qui passe par le centre A et qui se termine à la circonférence est appelée *diamètre*. Il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé *demi-diamètre*.

7.

Fig. 6. La manière d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E ou l'extrémité d'un fil ou la pointe du compas, et d'un même intervalle E*b*, marquant deux points *a* et *b* sur la ligne AB, on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la distance au point *a* et au point *b* soit la même, et par ce point et par E on mènera la droite DE, qui, ayant chacune de ses extrémités également éloignée de *a* et de *b*, et ne penchant

pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre, sera perpendiculaire sur AB.

8.

De l'opération précédente suit la solution d'un nouveau problème.

Qu'il s'agisse de partager une ligne droite AB en deux parties égales. Des points A et B, pris comme centres, et d'une ouverture de compas quelconque, on décrira les arcs REI, GEF; ensuite, des mêmes centres, et de la même ou de telle autre ouverture qu'on voudra, on décrira aussi les arcs PDM, QDN. Alors la ligne ED, qui joindra les points d'intersection E et D, coupera AB en deux parties égales au point C. Fig. 7.

9.

La manière de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'était plus aisé que de s'en servir pour faire ces figures qu'on appelle *rectangles* et *quarrés*, dont on a parlé dans l'article 4. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés soient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre sur la droite GE un Fig. 2.

intervalle AB, égal à K, puis élever (article 5) aux points A et B les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer DC.

10.

Fig. 3. Si l'on voulait tracer un rectangle FGHI, dont la longueur fût K et la largeur L, on ferait FG égale à K; ensuite on élèverait les perpendiculaires FI et GH, chacune égale à L, puis on tirerait HI.

11.

Dans la construction des ouvrages, comme des remparts, des canaux, des rues, etc., on a besoin de mener des lignes parallèles, c'est-à-dire des lignes dont la position soit telle, que leurs intervalles aient partout pour mesure des perpendiculaires de même longueur. Or, pour mener ces parallèles, rien, ce semble, n'est plus naturel que de recourir à la méthode dont
Fig. 8. on se sert pour tracer des rectangles. Que AB, par exemple, soit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, etc., auquel on voudra donner la largeur CA; ou, pour énoncer la question d'une manière plus géométrique

et plus agréable, supposons qu'on veuille mener par C la parallèle CD à AB : on prendra à volonté un point B dans la ligne AB, et l'on opérera de la même façon que si, ayant la base AB, on voulait faire un rectangle ABDC, qui eût AC pour hauteur. Alors les lignes CD, AB, étant prolongées à l'infini, seraient toujours parallèles, ou, ce qui revient au même, elles ne se rencontreraient jamais.

12.

La régularité des figures rectangulaires les faisant souvent employer, comme nous avons déjà dit, il se trouve bien des cas où l'on a besoin de connaître leur étendue. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapisserie pour une chambre, ou combien un enclos de maison, ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, etc.

On sent que, pour parvenir à ces sortes de déterminations, le moyen le plus simple et le plus naturel est de se servir d'une mesure commune, qui, appliquée plusieurs fois sur la surface à mesurer, la couvre tout entière : mé-

Digitized by Google

thode qui revient à celle dont on s'est déjà servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or, il est évident que la mesure commune des surfaces doit être elle-même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, etc. Ainsi mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre des toises quarrées, ou des pieds quarrés, etc., que contient sa surface.

Prenons un exemple pour soulager l'esprit.
Fig 9. Supposons que le rectangle donné ABCD ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en sept bandes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés. La valeur du rectangle sera donc sept fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

Maintenant, si l'on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, et qu'on se souvienne que multiplier deux nombres c'est prendre l'un autant de fois que l'unité est contenue dans l'autre, on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire et l'opération par laquelle on mesure le rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre des toises

ou des pieds, etc., que donne sa hauteur, par le nombre des toises ou des pieds, etc., que donne sa base, on déterminera la quantité des toises quarrées ou des pieds quarrés, etc., que contient sa superficie.

13.

Les figures qu'on a à mesurer ne sont pas toujours régulières, comme les rectangles, cependant on a souvent besoin d'avoir leur mesure. Tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage construit sur un terrain qui manquera de régularité, tantôt on voudra savoir ce qu'une terre irrégulièrement bornée contiendra d'arpens. Il était donc nécessaire qu'à la méthode de déterminer l'étendue des rectangles, on ajoutât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

On voit d'abord que, pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire des figures terminées par des lignes droites; car si dans le contour du terrain il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure Fig. 10.

Fig. 11. ABCDEFG, il est évident que ces lignes partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toujours être prises pour un assemblage de lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de trois côtés, nommées communément *triangles;* ce qu'on fera de la manière la plus simple et la plus commode, si, d'un point quel-
Fig. 10. conque A du contour de la figure ABCDE, on mène les lignes droites AC, AD, etc., aux points C, D, etc.

14.

Il ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or, on sait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus sûr est de chercher si, dans ce qu'on connaît, rien ne se rapporterait à ce qu'on veut connaître; mais on a déjà vu que tout rectangle
Fig. 12. ABCD est égal au produit de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs il est aisé de s'apercevoir que cette figure, coupée transversale-

ment par la ligne AC, nommée *diagonale*, se trouve partagée en deux triangles égaux; et de là on infère que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur base AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA.

Il est vrai qu'il n'arrive guère que les triangles à mesurer aient deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle *triangles rectangles*; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espèce.

Car que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ADB, ADC. Fig. 13.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ADB, ADC, seront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC sera de même la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base et AD pour hauteur. Mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du

produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

On a donc la manière de mesurer tous les terrains terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, et que des sommets de ces triangles on sait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

15.

De ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire ou la superficie des triangles, on n'emploie que leur base et leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette proposition ou ce théorème, que
Fig. 14. tous les triangles, tels que ECB, ACB, qui ont une base commune CB, et dont les hauteurs EF, AD, sont égales, ont la même superficie.

16.

Pour faciliter l'intelligence du principe qui donne la mesure des triangles, nous avons cru ne devoir choisir pour base qu'un côté sur lequel pourrait tomber la perpendiculaire abaissée du sommet opposé; ce qu'on a toujours la

liberté de faire, quand il ne s'agit que de la mesure des terrains. Mais parce que, dans la comparaison des triangles qui ont même base, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets peuvent tomber hors du triangle, comme dans la figure 15, il semble qu'il soit nécessaire de voir si les triangles, tels que BCG sont dans le cas des autres, c'est-à-dire s'ils sont toujours moitié des rectangles ECBF, qui ont la perpendiculaire GH pour hauteur. Fig. 15

Mais c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que le triangle CGH, somme des deux triangles CGB, GBH, est la moitié du rectangle ECHG, somme des deux rectangles ECBF, FBHG; et qu'ainsi les deux triangles CGB, GBH, pris ensemble, valent la moitié du rectangle ECHG. Or le triangle GBH est la moitié du rectangle FBHG; donc le triangle proposé CGB est la moitié de l'autre rectangle ECBF, qui a BC pour base, et GH pour hauteur.

17.

La proposition démontrée dans les trois articles précédens peut encore s'énoncer géné-

Digitized by Google

Fig. 16. ralement en ces termes : les triangles EBC, ABC, GBC, sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune BC, et qu'ils sont entre les mêmes parallèles EAG, CBH, c'est-à-dire lorsque leurs sommets E, A, G, se trouvent dans une même ligne droite EAG, parallèle à la droite CB; car alors (article 11) leurs hauteurs, mesurées par les perpendiculaires EF, AD, GH, sont les mêmes.

18.

Entre les différentes figures rectilignes qu'on sait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent de la régularité des rec-
Fig. 17. tangles; ce sont des espaces tels que ABCD, terminés par quatre côtés, dont chacun est parallèle au côté qui lui est opposé. Ces figures sont appelées *parallélogrammes;* elles sont plus aisées à mesurer que les autres figures rectilignes, les rectangles exceptés. Car qu'on partage le parallélogramme ABCD en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles seront visiblement égaux : or, comme chacun de ces triangles vaudrait la moitié du produit de la hauteur AF, par la base BC, le parallélogramme aura pour

mesure le produit entier de la base BC par la hauteur AF.

19.

De là il suit que tous les parallélogrammes ABCD, EBCF, qui auront une base commune, et qui se trouveront entre les mêmes parallèles, seront égaux; ce qu'il est aisé de voir, même indépendamment de ce qui précède, en remarquant que le parallélogramme ABCD deviendra le parallélogramme EBCF, si on lui ajoute le triangle DCF, et que, de la figure entière ABCF, on retranche le triangle ABE; qu'ainsi les deux triangles DCF, ABE, étant supposés égaux, il sera évident que le parallélogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'assurer de l'égalité de ces deux triangles, il suffira d'observer que AB et CD étant parallèles, aussi bien que BE et CF, le triangle DCF ne sera autre chose que le triangle ABE, qui aura glissé sur sa base, de manière que le point A sera arrivé en D, et E en F. Fig 18 ou 19.

20.

Il y a encore d'autres figures rectilignes qu'il

est aisé de mesurer, et qu'on nomme polygones réguliers; figures que terminent des côtés égaux, qui ont tous la même inclinaison les uns sur les autres. Telles sont les figures ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH.

Fig. 20, 21 et 22.

Comme on a coutume de donner la forme symétrique de ces figures aux bassins, aux fontaines, aux places publiques, etc., je crois qu'avant que d'apprendre à les mesurer, il faut voir de quelle manière on les trace.

21.

Qu'on décrive une circonférence de cercle, qu'on la partage en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au polygone; qu'ensuite on mène les lignes AB, BD, DE, etc., par les points A, B, D, E, etc., qui partageront la circonférence, on aura le polygone cherché, qu'on nommera ou *pentagone*, ou *hexagone*, ou *eptagone*, ou *octogone*, ou *ennéagone*, ou *décagone*, etc., suivant qu'il aura, ou cinq, ou six, ou sept, ou huit, ou neuf, ou dix, etc., côtés.

Digitized by Google

22.

Pour avoir la mesure d'un polygone régulier, on pourrait employer la méthode qu'on a déjà donnée (article 13) pour toutes les figures rectilignes; mais on s'aperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui aient tous le centre C pour sommet. Fig. 22. Car prenant un de ces triangles, CBD par exemple, et tirant sur la base BD la perpendiculaire CK, qui pour lors sera nommée l'*apothème du polygone*, comme l'aire du triangle vaudra le produit de la base BD par la moitié de CK, ce produit pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entière.

23.

Qu'on ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formerait un triangle nommé communément *triangle équilatéral*; qu'on partageât cette circonférence en quatre parties égales, on formerait un quarré : mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans

qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle ; c'est ce qu'on a déjà vu (art. 9) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'apercevoir que pour le décrire sur
Fig. 23. une base donnée AB, il faut que des points A et B, comme centres, et d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF et GCH, qu'ensuite des points A et B on mène les lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, et sommet du triangle.

24.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral et le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrais joindre celle de tracer géométriquement un pentagone, comme plusieurs auteurs l'ont fait dans les Élémens qu'ils nous ont donnés ; mais parce que les commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'apercevraient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit en cherchant la manière de tracer cette figure, route que l'Algèbre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone

au traité qui suivra celui-ci, et dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, et qui, sans le secours de l'Algèbre, ne pourraient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, et que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, etc., côtés, et ceux de 8, de 16, de 32, de 64, etc., côtés, qu'on peut aisément décrire par les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette première partie.

25.

Je reviens à la mesure des terrains, et je vois que ceux qu'on veut mesurer sont souvent tels, qu'ils se refusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

Je suppose que ABCDE soit la figure d'un champ, d'un enclos, etc., dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vu, il faudrait partager ABCDE en triangles tels que Fig. 24.

ABC, ACD, ADE; ensuite mesurer ces triangles, après avoir abaissé les perpendiculaires EF, CH, BG: mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élévation, par exemple, un bois, un étang, etc., qui empêche qu'on ne mène les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors? Quelle méthode faudra-t-il suivre pour remédier à l'inconvénient du terrain? Celle qui se présente d'abord à l'esprit, c'est de choisir quelque terrain plat, sur lequel on puisse aisément opérer, et de décrire sur ce terrain des triangles égaux et semblables aux triangles ABC, ACD, etc. Voyons comment on s'y prendra pour former les nouveaux triangles.

26.

Pl. II, fig. 25. Commençons par supposer que l'obstacle se trouve dans l'intérieur du triangle ABC, dont les côtés seront connus, et qu'on veuille tracer un triangle égal et semblable sur le terrain choisi; d'abord on décrira une ligne DE égale au côté AB, ensuite prenant une corde de la longueur BC, et fixant une de ses extrémités Fig. 25 et 26.

en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; et par le moyen d'une autre corde, prise égale à AC, et dont on attachera pareillement un des bouts en D, on tracera l'arc KFH, qui coupera le premier au point F. Alors menant les lignes DF et FE, on aura un triangle DEF égal et semblable au triangle proposé ABC; ce qui est évident; car les côtés DF et EF, qui s'uniront au point F, étant respectivement égaux aux côtés AC et BC, unis au point C, et la base DE ayant été prise égale à AB, il ne serait pas possible que la position des lignes DF et EF sur DE fût différente de la position des lignes AC et BC sur AB. Il est vrai qu'on pourrait prendre les lignes D*f*, E*f*, au-dessous de DE; mais le triangle se trouverait encore le même, il serait simplement renversé.

27.

Si l'on ne pouvait mesurer que deux des trois côtés du triangle ABC, les deux côtés AB, BC, par exemple; il est clair qu'avec cela seul on ne pourrait pas déterminer un second triangle égal et semblable à ABC; car quoiqu'on eût Fig. 27.

Fig. 27 et 28.

pris DE égal à BC, et DF égal à BA, on ne saurait quelle position donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pencher DF, de la même manière sur DE que AB penche sur BC; ou, pour s'exprimer comme les géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC.

28.

Pour faire cette opération, on prend un instrument tel que *abc*, composé de deux règles qui puissent tourner autour de *b*, et l'on pose ces règles sur les côtés AB et BC : par là, elles font entre elles le même angle que les côtés AB et BC. Plaçant donc la règle *bc* sur la base DE, de manière que le centre *b* réponde au point D, et que l'ouverture de l'instrument reste toujours la même, la règle *ab* donnera la position de la ligne DF, qui fera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or, la ligne DF aura été prise de même longueur que BA; donc il ne s'agira plus que de mener par F et par E la droite FE, pour avoir le triangle FED entière-

ment égal et semblable au triangle ABC. Pratique simple, qui suppose ce principe évident, qu'un triangle est déterminé par la longueur de deux de ses côtés, et par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle est égal à un autre lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux et que l'angle compris entre ces côtés est également ouvert.

29.

On pourrait encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC, de la manière suivante. Fig. 29 et 30.

Du centre B et d'un intervalle quelconque B*a*, décrivez un arc *ahc*; ensuite du centre D et du même intervalle, tracez l'arc *eif* : alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point *f*, qui soit placé sur l'arc *eif* de la même manière que *a* se trouvera placé sur l'arc *cha*. Or, vous trouverez facilement ce point *f*, en vous servant de la droite *ac*, qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la *corde de l'arc ahc*.

Car si, du centre *e* et d'un intervalle égal à *ac*, vous décrivez l'arc *lfk*, l'intersection des deux arcs *eif*, *lfk* vous donnera le point cherché *f*.

Tirez ensuite par D et par *f* la ligne D*f*F, vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC; ce qui est évident (article 26), puisque les triangles B*ac*, D*fe* seront entièrement égaux et semblables dans toutes leurs parties.

30.

Fig. 27 et 28. Lorsqu'on veut faire le triangle FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puisse mesurer qu'un des côtés, BC, par exemple, on a recours aux angles ABC et ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD et FE de manière qu'elles fassent, avec DE, les mêmes angles que AB et AC font avec BC : alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal et semblable au triangle ABC. Le principe que suppose cette opération est de lui-même si simple, qu'il n'a pas besoin d'être démontré.

31.

Fig. 31. Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvait mesurer que la base BC, et qu'on sût d'ailleurs que ce triangle fût isocèle, c'est-à-dire que les deux côtés AB et AC fussent égaux;

il est évident qu'il suffirait de mesurer un des deux angles ABC, ACB; car alors l'autre lui serait égal.

On en voit aisément la raison, si l'on se représente ce qui arriverait en supposant que les deux côtés AB, AC du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur BD et sur CE, prolongemens de la base BC, et qu'ensuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcherait de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pencheraient également sur la base BC; donc l'angle ABC serait égal à l'angle ACB.

32.

Pour revenir à la mesure des terrains, on verra que quels que soient les obstacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il sera aisé, par la méthode précédente, de transporter sur un terrain libre tous les triangles qui partageront l'espace qu'on voudra mesurer.

Supposons, par exemple, que vous voulussiez mesurer un bois, dont la figure fût ABCDEFG. Fig. 31.

D'abord vous prendriez un triangle égal à

ABC, ce que vous pourriez faire sans entrer dans l'intérieur de ce triangle, en mesurant les deux côtés AB, BC, et l'angle compris CBA.

Ce triangle décrit donnerait l'angle BCA, et la longueur de AC; et comme vous pourriez mesurer le côté extérieur DC, vous auriez dans le triangle CAD, les côtés DC et CA. Quant à l'angle DCA, vous le trouveriez en prenant d'abord l'angle IKL égal à l'angle DCB, ensuite l'angle LKO égal à l'angle BCA, ce qui vous donnerait l'angle restant IKO, égal à l'angle cherché DCA.

Fig. 32 et 33.

Le triangle ADC, ainsi déterminé par les deux côtés DC et CA, et par l'angle compris DCA, vous connaîtriez de même le triangle DAG, et le reste de la figure.

33.

La méthode qu'on vient de donner pour mesurer les terrains dans lesquels on ne saurait tirer des lignes, fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni et libre, assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on

cherche la mesure; et même quand on en trouverait, la grande longueur des côtés des triangles pourrait rendre les opérations très difficiles. Abaisser une perpendiculaire sur une ligne, d'un point qui en est éloigné seulement de 500 toises, ce serait un ouvrage extrêmement pénible, et peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer ABCDE, par une figure semblable *abcde*, mais plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *ab* soit de 100 pouces, si le côté AB est de 100 toises, le côté *bc* de 45 pouces, si BC est de 45 toises; et de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite *abcde* est de 60000 pouces quarrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60000 toises quarrées. Fig. 34 et 35.

Mais, avant toutes choses, il faut savoir en quoi consiste la ressemblance de deux figures.

34.

Or, pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnaîtra bientôt que les deux figures ABCDE, *abcde*, pour être semblables, doivent être telles, que les angles A, B, C, D, E, de la grande soient égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite; et que de plus, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, etc., de la petite, contiennent autant de parties *p*, que les côtés AB, BC, CD, etc., de la grande, contiennent de parties P.

35.

Pour exprimer cette seconde condition, les géomètres disent qu'il faut que les côtés AB, BC, CD, etc., soient proportionnels aux côtés *ab*, *bc*, *cd*, etc.; ou que le côté AB contienne *ab*, de la même manière que BC contient *bc*, etc.; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à *ab*, que BC l'est par rapport à *bc*, etc.; ou encore, qu'il y ait même raison ou même rapport entre AB et *ab*, qu'entre BC et *bc*; ou enfin, que AB soit à *ab* comme BC à *bc*, etc. Toutes façons d'exprimer la même chose, mais

qu'il faut se rendre familières, pour entendre le langage des géomètres.

36.

Après avoir vu en quoi consiste la ressemblance de deux figures, cherchons quelle est la voie qui se présente le plus naturellement pour tracer une figure semblable à une autre. Pour cela, représentons-nous un dessinateur qui veut copier une figure en la réduisant.

D'abord prenant *ab* pour représenter la base AB de la figure à copier ABCDE, il incline sur *ab* les côtés *ae* et *bc*, de la même façon que AE et BC sont inclinés sur AB, en observant que les longueurs de *ae* et de *bc* soient à celle de *ab*, comme les longueurs de AE et de BC sont à celle de AB; c'est-à-dire que si AE, par exemple, est la moitié de AB, il fait *ae* égal à la moitié de *ab*, et qu'il en use de même pour déterminer la longueur de *bc*, relativement à BC.

Ayant ainsi déterminé les points *e* et *c*, il trace deux lignes *ed* et *cd* qu'il incline sur *ea* et sur *cb*, de la même manière que ED et CD sont inclinés sur EA et sur CB; et, prolongeant ces

lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *d*, il achève sa figure *abcde*.

37.

Qu'on réfléchisse présentement sur cette construction, on verra qu'elle n'est appuyée que sur l'égalité qui est entre les angles E, A, B, C, et *e*, *a*, *b*, *c*, et sur la proportionnalité des côtés EA, AB, BC, et des côtés *ea*, *ab*, *bc*; qu'ainsi la figure se trouve finie sans qu'on ait pris l'angle *d* égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD; réflexion qui d'abord pourrait faire craindre que l'angle *d* ne fût pas effectivement égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD, et que, par conséquent, la figure *abcde* ne se trouvât pas entièrement semblable à la figure ABCDE. Mais n'eût-on que l'expérience pour se rassurer, ce doute se dissiperait bientôt; outre que, pour peu d'attention qu'on y fasse, on sent que de l'égalité respective des quatre angles E, A, B, C, et *e*, *a*, *b*, *c*, et de la proportionnalité des trois côtés EA, AB, BC, et *ea*, *ab*, *bc*, résultent nécessairement l'égalité

des angles D, *d*, et la proportionnalité des côtés ED, CD, et *ed*, *cd*.

Cependant, pour écarter tout soupçon, faisons voir que toutes les conditions que demande la ressemblance de deux figures sont nécessairement dépendantes les unes des autres; ce qu'il nous sera aisé de faire en examinant d'abord les triangles, qui sont les figures les plus simples, et qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres; examen qui nous conduira à toutes les propriétés et à tous les usages des figures semblables.

38.

Supposons que sur la base *ab* on trace le triangle *abc*, en ne prenant que les angles *cab*, *cba* égaux aux angles CAB, CBA du triangle ABC, on s'assurera premièrement que le troisième angle *acb* égalera le troisième angle ACB. Fig. 36 et 37.

Car soit posé le triangle *abc* sur le triangle ABC, de manière que le point *a* se trouve sur le point A, *ab* sur AB, *ac* sur AC; il est clair que *cb* sera parallèle à CB, et cela parce que le côté *cb*, prolongé, ne pourrait rencontrer le

côté CB, que les deux lignes ne penchassent inégalement sur AB, et que, par conséquent, les angles *cb*A et CBA fussent inégaux; ce qui serait contre la supposition.

Comme de l'égalité des angles *cba* et CBA, il suivra que les lignes *cb*, CB seront parallèles, du parallélisme de ces lignes, il suivra aussi que les angles A*cb*, ACB seront égaux; ce qu'il s'agissait de prouver.

39.

Maintenant faisons voir que les côtés qui se répondent dans deux triangles *acb* et ACB, qui ont les mêmes angles, sont proportionnels.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que *ab* soit la moitié de AB; il faudra que nous prouvions que *ac* sera aussi la moitié de AC. Que *acb*, ainsi que dans l'article précédent, ait encore la position A*cb* : si l'on mène *cg* parallèle à AB, il est clair que cette ligne égalera *b*B ou A*b*, et que *g*B égalera de même *cb*. Or, comme les angles C*gc* et C*cg* seront manifestement égaux aux angles *cb*A et *c*A*b*, le triangle C*cg* égalera le triangle *c*A*b* (article 30).

Donc on aura C*c* égal à A*c*, et C*g* égal à *cb*, ou à *g*B; donc A*c* ou *ac* sera moitié de AC, et *cb* moitié de CB.

Si *ab* était contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudrait, dans AB, il serait également aisé de démontrer que *ac* serait contenu le même nombre de fois dans AC, et *cb* dans CB. Car des points de division *b*, *f* de la base AB, menant *bc*, *fh*, etc., parallèles à BC, on pourrait placer le long de AC, trois, quatre, etc., triangles A*cb*, *chg*, *h*C*i*, etc., égaux aux triangles *acb*, A*cb*. Fig. 36 et 38.

Mais que *ab*, au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois et demie, par exemple, on prouverait que *ac* serait aussi contenu deux fois et demie dans AC, et *bc* deux fois et demie dans BC. Fig. 36 et 39.

Car, quand par le moyen des parallèles *bc*, *fh*, on aurait placé le long de AC les deux triangles A*cb*, *chg*, égaux à *acb*, il resterait entre les deux parallèles *hf* et CB de quoi placer un triangle C*hi*, dont les côtés seraient moitié des côtés de *c*A*b*; ce qui est évident, puisque par la supposition *f*B serait la moitié de A*b*,

Digitized by Google

et que la base *hi* du triangle C*hi* égalerait *f*B, à cause des parallèles *hf*, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles nommés *triangles semblables*, ont leurs côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC, contiennent le même nombre de parties P, que les côtés *ab*, *bc*, *ac*, de l'autre triangle *abc*, contiennent de parties *p*, P étant le pied, la toise, etc., ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC a été construit, et *p* celle dont on s'est servi en construisant *abc*.

40.

De la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problème souvent utile dans la pratique.

On demande qu'une ligne soit divisée en un nombre donné de parties égales; ce qui se pourrait faire, à la vérité, en tâtonnant, mais jamais avec cette sûreté que donne l'exactitude géométrique.

Supposons, par exemple, qu'on ait à diviser
Fig. 38. AB en trois parties égales; on commence par

tirer une ligne indéfinie AC, qui fasse un angle quelconque avec AB; ensuite on porte sur cette ligne trois parties égales A*c*, *ch*, *h*C, d'une ouverture de compas prise à volonté; puis on tire CB, et l'on mène à cette droite les parallèles *cb*, *hf*; par là, AB, coupée aux points *b* et *f*, se trouve partagée en trois parties égales; ce qui est clair par l'article précédent.

41.

Si l'on voulait diviser une ligne en un nombre fractionnaire de parties, comme deux et demie, trois et un quart, etc., ou bien qu'on proposât en général, de diviser la ligne AB au point *b*, en sorte que AB fût à A*b*, comme la ligne NO à la ligne MQ; on voit encore que la solution du problème dépendrait de l'article 39, c'est-à-dire qu'il faudrait tirer par A une droite quelconque, prendre sur cette droite A*c* et AC respectivement égales à MQ et à NO, et ensuite mener *cb* parallèle à CB; alors le point *b* serait le point cherché. Fig. 39.

Les géomètres énoncent de cette autre manière le problème que nous venons de résou-

dre : Trouver à trois lignes NO, MQ, AB, une quatrième proportionnelle.

42.

Fig. 40 et 41. Il est évident que deux triangles semblables ABC, *abc*, auront non-seulement leurs côtés proportionnels, mais que les perpendiculaires CF, *cf*, qu'on abaissera des sommets C, *c* sur les bases AB, *ab*, suivront encore la proportion des côtés : ce qui est si aisé à démontrer par ce qui précède, que nous négligerons de nous y arrêter.

43.

Quant à l'aire des triangles semblables ABC, *abc*, on voit que celle du premier contiendra autant de quarrés X faits sur la mesure P, que l'aire du second contiendra de quarrés x, faits sur la mesure p. Car comme CF et AB auront, par l'article précédent, autant de parties P que *cf* et *ab* auront de parties p, la moitié du produit de CF par AB, mesure de ABC (article 14) donnera le même nombre que celui qui résultera de la moitié du produit de *cf* par *ab*,

mesure de *abc*, mais avec cette différence, que CF et AB se comptant en parties P, leur produit se comptera en quarrés X, et que *cf* et *ab*, qui se compteront en parties *p*, donneront un produit qui se comptera en quarrés *x*.

44.

Ce que nous venons de dire sur la mesure des triangles semblables sert de preuve à une proposition qui, dans les élémens de Géométrie, s'énonce ordinairement ainsi : Les triangles semblables ABC, *abc*, sont entre eux comme les quarrés ABDE, *abde*, de leurs côtés homologues ou correspondans AB, *ab*.

La démonstration que renferme l'article précédent mène absolument à cette conséquence; car le quarré ABDE contenant autant de X que *abde* contient de *x*, il est évident que les deux nombres de quarrés X, qui expriment le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, sont les mêmes que les nombres de quarrés *x*, qui donnent le rapport du triangle *abc* au quarré *abde*, ou, ce qui revient au même, que le trian-

gle ABC est au quarré ABDE comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

De là il suit que si, par exemple, le côté AB était double du côté *ab*, le triangle ACB serait quadruple du triangle *acb*; que si AB était triple de *ab*, le triangle ACB serait neuf fois plus grand que le triangle *acb*, etc.; car AB ne peut être double de *ab*, que le quarré ABDE ne soit quadruple du quarré *abde*, etc.

45.

Fig. 34 et 35. Pour passer présentement des triangles aux autres figures, supposons qu'à chacun des triangles semblables ABD, *abd*, on joigne deux autres triangles ADE et BDC, *ade* et *bdc*, les deux premiers semblables aux deux autres, on verra que dans les figures totales ABCDE, *abcde*,

1°. Les angles A, B, C, D, E, seront les mêmes que les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ce qui est clair, puisque les uns et les autres seront, ou des angles correspondans de triangles semblables, ou des angles composés de ces angles correspondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homo-

logues ou correspondans DE, *de*, BC, *bc*, etc., des figures ABCDE, *abcde*, sera nécessairement le même, c'est-à-dire que si P, par exemple, se trouve un certain nombre de fois dans la base AB, et que *p* se trouve le même nombre de fois dans *ab*, P et *p* seront aussi contenus un même nombre de fois dans deux côtés homologues quelconques DE et *de*. Car à cause de la ressemblance des triangles ABD, *abd*, la quantité de P que renfermera AD, égalera la quantité de *p* renfermée dans *ad*; alors regardant ces côtés comme les bases des triangles semblables ADE, *ade*, le nombre de parties P contenues dans DE sera le même que le nombre de parties *p* que contiendra le côté *de*.

3°. On verra encore que si dans les deux figures on tirait des lignes qui se répondissent, telles que CE, *ce*, ou les perpendiculaires DF, *df*, etc., ces lignes seraient toujours entre elles dans la même raison que les côtés homologues des deux figures.

Donc les figures ABCDE, *abcde*, seront entièrement semblables dans toutes leurs parties.

46.

La figure *abcde* ainsi décrite parfaitement semblable à la figure ABCDE, il est évident que si l'on voulait tracer de nouveau une figure entièrement égale à *abcde*, et par conséquent encore semblable à ABCDE, il serait inutile de mesurer tous les côtés et tous les angles de *abcde*; qu'il suffirait, par exemple, de prendre les trois côtés *ab*, *ea*, *bc*, et les quatre angles *e*, *a*, *b*, *c*, et qu'avec cela seul on serait sûr de retracer la même figure *abcde*, semblable à ABCDE; ce qui forme une démonstration complète de ce qu'on n'avait fait que présumer (article 37). Mais on peut aller plus loin; car il est clair qu'on aura toujours différentes façons de combiner la quantité d'angles et de lignes qu'on doit nécessairement mesurer dans une figure quelconque, pour en faire une autre qui lui soit proportionnelle. Ce serait fatiguer le lecteur, que d'entrer dans un plus grand détail.

47.

On démontrerait, par des raisonnemens sem-

blables à ceux de l'article 43, que le nombre des quarrés X que contient la figure ABCDE, est le même que celui des quarrés x renfermés dans la figure *abcde*, et qu'ainsi, les aires des figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

48.

Tout ce qui vient d'être dit sur les figures semblables peut se réduire à ce seul et unique principe, que les figures semblables ne sont différenciées que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

49.

Maintenant, pour mieux sentir l'usage qu'on doit faire des triangles semblables et des réductions, pour avoir la mesure des terrains sur lesquels on ne pourrait pas commodément opérer, figurons-nous que ABCDEF représente le contour d'un parc, d'un étang, etc., dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on mesurera un des côtés de la figure, FE par exemple, et l'on verra combien ce côté aura de toises, de Pl. III, Fig. 42 et 43.

perches, etc., ensuite, prenant telle échelle qu'on voudra, on tracera sur un papier ou sur un carton une ligne *fe*, égale à autant de parties de l'échelle que FE contiendra de toises, de perches, etc., puis faisant les angles *def*, *dfe* égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle *edf*, dans lequel on abaissera *eg* perpendiculaire sur *df*. Cela fait, et les lignes *df* et *eg* mesurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF et EG contiendront de toises, de perches, etc. Ainsi, en multipliant DF par la moitié de EG, on aura la valeur du triangle EDF; et mesurant de la même manière chacun des autres triangles DCF, BCF, ABF, l'aire de la figure entière se trouvera déterminée.

50.

Il arrive souvent que dans la pratique, il faut mesurer la distance du lieu F où l'on est placé, à un autre lieu où quelque obstacle empêche qu'on ne se transporte; nouveau problème, mais dont la solution est déjà donnée d'avance dans l'article qui précède celui-ci; car puisque

pour mesurer DF, on n'a eu besoin que de la similitude des triangles *def* et DEF, il est clair que si l'on mesure une base quelconque EF, et que des points F et E on puisse apercevoir le point D, le problème sera résolu, c'est-à-dire qu'on aura la distance FD.

51.

L'usage qu'on peut faire des instrumens particuliers, tels que *b*A*c*, que j'ai dit (article 28) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expose souvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le transport; tantôt la forme qu'on est obligé de donner à l'instrument pour en faciliter l'usage empêchera qu'on ne puisse l'appliquer sur le plan où devra se faire la réduction. Fig. 44.

Ajoutons à cela, que chaque nouvel angle BAC qu'on prend de cette façon demande qu'on transporte de nouveau l'instrument sur le papier, et que la seule ressource qu'on ait pour comparer deux angles, c'est de les poser l'un sur l'autre, sans que, par ce moyen, on

puisse avoir au juste ni leur rapport ni leur grandeur absolue.

52.

Il était donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avait déjà une pour les longueurs. Or, cette mesure qu'il fallait avoir, il a été facile de la trouver ;
Fig. 45. car, que A*b* restant fixe, on lui applique d'abord le côté A*c*, qu'ensuite on fasse tourner ce côté autour de A, il est clair que si l'on adapte à l'extrémité *c* de la branche mobile A*c*, ou une plume ou un crayon, qui donne moyen de rendre sensible la trace du point *c*, cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle pour chaque ouverture particulière des côtés A*b*, A*c*, c'est-à-dire qu'à cause de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera nécessairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de *c*A*b*, répondra un arc double, triple, quadruple de *cb*.

53.

Supposant donc que la circonférence *bcdfg*, décrite par la révolution entière du point c, soit

divisée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes A*c* et A*b* mesurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle *c*A*b* qu'elles formeront.

Les géomètres sont convenus de diviser le cercle en 360 parties qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, etc. Ainsi, un angle *b*A*c*, par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, si l'arc *bc*, qui lui servira de mesure, a 70 des 360 parties du cercle, et de plus de 20 soixantièmes parties d'un degré.

54.

De là, il suit qu'un angle CAB de 90 degrés, nommé communément *angle droit*, est celui dont les côtés AC et AB interceptent le quart BC de la circonférence, et sont perpendiculaires l'un à l'autre. Fig. 46.

55.

On appelle *angle aigu*, tout angle plus petit qu'un angle droit, ou qui a moins de 90 de-

Fig. 47. grés. Tels sont les angles CAB, FAG, EAG.

56.

Au contraire, on appelle *angle obtus*, celui qui a plus de 90 degrés, comme FAB.

57.

Il est évident que tous les angles, comme GAF, FAE, EAC, CAB, qu'on peut faire du même côté sur une ligne droite GB, et qui ont le même sommet A, sont égaux, pris ensemble, à 180 degrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

58.

Fig. 48. De même la somme de tous les angles EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, qu'on peut faire autour du point A, qui leur sert de sommet commun, est égale à 360 degrés, ou à quatre angles droits, mesurés par la circonférence entière BCDEF.

59.

Après avoir trouvé que les angles ont les par-

Digitized by Google

ties du cercle pour mesure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut mesurer contient de degrés.

On se sert d'un instrument I, qu'on appelle *demi-cercle* : cet instrument est composé de deux règles EAC, DAB d'égale longueur, qui se croisent en A, et qui sont chargées de pinnules à leurs extrémités. L'une de ces règles EC, qu'on nomme *alidade*, est mobile autour de A, et l'autre DB, est fixe, et sert de diamètre à un demi-cercle DCB divisé en 180 degrés, etc. Fig. 49.

Or, veut-on connaître l'angle que forment deux lignes droites tirées du lieu où l'on est à deux objets quelconques F, G; on place d'abord la règle fixe DAB, de manière que l'œil, placé en D, aperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D et B; ensuite, sans remuer l'instrument, on tourne l'alidade, jusqu'à ce que l'œil, placé en E, aperçoive l'autre objet G, par les pinnules E et C; et alors l'alidade marque sur le demi-cercle gradué le nombre des degrés, minutes, etc., que contient l'angle proposé GAF.

60.

Si l'on veut faire sur le papier un angle d'un nombre déterminé de degrés, on se sert d'un
Fig. 50. instrument K, divisé en 180 degrés, qu'on appelle *rapporteur*, ou *transporteur*, et posant le centre A sur la pointe de l'angle qu'on veut tracer, et la ligne AB sur la ligne AG qu'on prend pour un des côtés de l'angle, on remarque le point C qui répond au nombre des degrés qu'on veut donner à l'angle proposé, puis par ce point et par le centre A, tirant la ligne ACO, on a l'angle OAG, qui contient le nombre de degrés demandé.

61.

Supposons maintenant qu'ayant pris une
Fig. 51 et 52. base FG sur le papier, on veuille faire sur cette base un triangle FGH, semblable au triangle ABC pris sur un terrain. On se servira du demi-cercle pour savoir ce que chacun des angles CAB, CBA contiendra de degrés; ensuite, par le moyen du rapporteur, on fera les an-

gles HFG et HGF respectivement égaux aux angles CAB et CBA; et parce qu'alors le point H, auquel les côtés FH et GH se réuniront, sera nécessairement déterminé par l'opération, aussi bien que l'angle FHG, on aura le triangle FGH, entièrement semblable au triangle ABC.

62.

Comme il importe dans la pratique, ainsi que nous l'avons déjà dit, que les angles soient exactement mesurés, il ne faut pas se contenter de les prendre, même avec les instrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs mesures, pour en faire la correction, s'il était nécessaire. Or ce moyen est simple et facile. Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celles des angles A et B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes CA, BC changerait, et par conséquent, l'angle C que ces lignes font entre elles. Or, si cet angle dépend de la grandeur des angles A et B, on doit présumer que ce que les angles A et B renferment de degrés, doit déterminer le

nombre des degrés que doit renfermer l'angle C; et qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A et B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A et B, si en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre des degrés qui lui conviendront relativement à la grandeur des angles A et B.

Pour trouver comment de la grandeur des angles A et B on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriverait à cet angle, si les lignes AC, BC venaient, ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exem-
Fig. 53. ple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB pour s'approcher de BE; il est clair que pendant que BC tournerait, l'angle B s'ouvrirait continuellement, et qu'au contraire l'angle C se resserrait de plus en plus; ce qui d'abord pourrait faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égalerait l'augmentation de l'angle B, et qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C serait toujours la même, quelle que fût l'inclinaison des lignes AB, BC, sur la ligne AE.

63.

Or, cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ; car qu'on mène ID parallèle à AC, on verra, premièrement, que les angles ACB et CBD, appelés *angles alternes*, seront égaux : ce qui est évident, puisque les lignes AC et IB étant parallèles, elles seront également inclinées sur CBO, et qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD, parce que la ligne ID ne sera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre : donc l'angle DBC, égal à à l'angle IBO, égalera l'angle ABC, son alterne. Fig. 54.

64.

On verra, en second lieu, que l'angle CAE sera égal à l'angle DBE, à cause des parallèles CA et DB. Donc les trois angles du triangle pourraient être mis à côté les uns des autres, et unis par leurs sommets aux points B, et alors on verrait que les trois angles DBE, CBD et CBA, qui égaleraient les trois angles CAB, ACB

et CBA, seraient égaux à deux angles droits (article 57). Or, comme tout ce que nous venons de dire pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce soit, on sera assuré de cette propriété générale, que la somme des trois angles d'un triangle est constamment la même, et qu'elle est égale à celle des deux droits, ou, ce qui revient au même, à 180 degrés.

65.

Donc, pour conclure la valeur du troisième angle d'un triangle, lorsqu'on en aura mesuré deux, il faudra retrancher de 180 degrés le nombre des degrés que les deux angles feront ensemble : propriété qui donne une manière bien commode de vérifier la mesure des angles d'un triangle, et dont on verra une infinité d'autres utilités, à mesure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conséquences les plus immédiates.

66.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle

droit; à plus forte raison, ne peut-il avoir plus d'un angle obtus.

67.

Si l'un des trois angles d'un triangle est droit, la somme des deux autres angles est toujours égale à un droit.

Ces deux propositions sont si claires, qu'elles n'ont pas besoin d'être démontrées.

68.

Si l'on prolonge un des côtés du triangle ABC, par exemple le côté AB l'angle extérieur CBE vaudra seul les deux angles intérieurs opposés BCA et CAB. Car qu'à l'angle CBA on ajoute, ou les deux angles BCA et CAB, ou l'angle CBE, la somme sera toujours égale à 180 degrés, ou à deux angles droits (article 64).

69.

Connaissant un des angles d'un triangle isocèle ABC, on connaît les deux autres. Fig. 55.

Qu'on ait l'angle au sommet A, il est clair que si l'on retranche le nombre des degrés que con-

tiendra cet angle des 180 degrés, mesure des trois angles du triangle, la moitié de la somme qui restera sera la mesure de chacun des angles B et C, pris sur la base.

Si c'était un des deux angles B ou C pris sur la base, qu'on connût, le double de sa valeur retranché de 180 degrés, donnerait l'angle au sommet A.

70.

Comme un triangle équilatéral n'est autre chose qu'un triangle isocèle, auquel chacun de ses côtés peut également servir de base, il est clair que ses trois angles sont nécessairement égaux, et qu'ils valent chacun 60 degrés, tiers de 180 degrés.

71.

De là se tire aisément la description de l'hexagone, ou polygone de six côtés, que nous avions promise (article 24).

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en six parties égales, il faudra que cette ligne soit la corde d'un arc de 60 degrés, sixième partie de 360 degrés, valeur de la cir-

conférence entière. Supposant donc que AB soit cette corde, et du centre I menant aux extrémités A et B les rayons AI et IB, l'angle AIB vaudra 60 degrés; et parce que les deux côtés AI et IB seront égaux, le triangle AIB sera isocèle. Donc, l'angle au sommet étant de 60 degrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 degrés, moitié de 120; donc (article 70) le triangle AIB sera équilatéral; donc AB égalera le rayon du cercle : d'où il suit que, pour décrire un hexagone, il faudra ouvrir le compas d'une intervalle égal au rayon et le porter six fois de suite sur la circonférence, et l'on aura les six côtés de l'hexagone. Fig. 56.

72.

L'hexagone ABCDEF décrit, on décrira facilement de dodécagone, ou polygone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc AKB, ou l'angle AIB, en deux parties égales; et AK, corde de l'arc AKB, sera un des côtés du dodécagone.

73.

Or, pour partager l'arc AKB en deux arcs égaux AK et KB, on fera la même opération que s'il s'agissait de couper la corde AB en deux parties égales; c'est-à-dire que des points A et B, comme centres, et d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP; ensuite, par le point L, section des deux arcs, et par le centre I, on mènera la ligne LI, qui divisera en deux, et l'arc AKB et la corde AB.

74.

Qu'on suive la méthode précédente, et qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs sera le côté du polygone de 24 côtés. On aura de même les polygones de 48, 96, 192, etc., côtés.

75.

Maintenant, pour décrire un octogone, c'est-à-dire un polygone de 8 côtés, on commencera par tracer un quarré dans le cercle; ce

qu'on fera, si, après avoir mené deux diamètres AIB et CIE, qui se coupent à angles droits, on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE et AE. Fig. 57.

Car, à cause de la régularité du cercle et de l'égalité des quatres angles que forment les perpendiculaires AIB et CIE, les quatre côtés AC, CB, BE et EA seront nécessairement égaux, et se trouveront également penchés les uns sur les autres ; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, etc., en deux parties égales ; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

Qu'on partageât de même chacun des arcs CK, KB, etc., en 2, en 4, en 8, etc., parties égales, on aurait les polygones de 16, 32, 64, etc., côtés.

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

Si l'on a fait attention à ce que nous avons dit pour montrer comment on est parvenu à mesurer les terrains, on a dû reconnaître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres fournissaient des remarques dignes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvaient être dans la pratique; et il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers géomètres à pousser plus loin leurs découvertes : car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Digitized by Google

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi, lorsqu'en mesurant les figures on s'est aperçu que, dans une infinité de cas, les échelles et les demi-cercles ne donnaient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléassent au défaut de ces instrumens.

Ici, nous reprendrons les figures rectilignes; mais dans les opérations que nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la règle et du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin, ou de rassembler dans une même figure plusieurs figures qui lui soient semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espèce; ce qu'on peut faire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, et que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur et même base.

Digitized by Google

1.

Pour comparer les rectangles, il faut savoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente; car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différeront plus que par leurs bases. Le plus grand sera celui qui aura la plus grande base, et il contiendra le plus petit de la même manière que sa base contiendra celle du plus petit rectangle; ce qu'on énonce ordinairement ainsi : deux rectangles qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases.

2.

Pour ajouter ces deux rectangles, il ne faudra que les poser l'un à côté de l'autre.

3.

Il ne sera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

4.

Et pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper sa base en un pareil nombre de parties égales, ensuite élever des perpendiculaires sur les points de division.

5.

Maintenant soit proposé de changer le rectangle ABCD en un autre BFEG, qui ait la même superficie et dont la hauteur soit BF. On remarquera que puisque sa valeur sera le produit de sa hauteur par sa base, il faudra que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur sera plus grande que BC, ait sa base plus petite que AB : c'est-à-dire que, si BF, par exemple, est double de BC, il faudra que BG ne soit que la moitié de AB. Pl. IV, fig. 58.

Si BF était le triple de BC, BG ne serait que le tiers de AB.

On verrait de même que si BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le conte-

nait avec fraction, comme deux fois et un tiers, le rectangle BFEG ne pourrait être égal au rectangle ABCD, que sa base BG ne fût aussi contenue deux fois et un tiers dans la base AB. Et en général, il sera aisé de voir qu'afin que deux rectangles ABCD et BFEG soient égaux, il faudra que la base BG de l'un soit contenue dans la base AB de l'autre, comme la hauteur BC dans la hauteur BF.

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne BA de manière que AB soit à GB comme BF à BC; ce qui se fera (Ire partie, art. 41) en menant la ligne FA, et du point donné C, la parallèle CG.

6.

Pour changer le rectangle ABCD en un autre rectangle BFEG qui ait une hauteur donnée BF, on peut employer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode.
Fig. 59. Ayant prolongé AD jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite FEI, menée par le point F, parallèlement à AB, on tirera la diagonale BI, et par le point O, où elle rencontrera le côté DC,

on mènera GOE parallèle à FB; et le rectangle BFEG sera égal au rectangle ABCD.

Pour le prouver, il suffira de faire voir qu'en ôtant des rectangles ABCD et BFEG la partie commune OCBG, le rectangle ADOG égalera le rectangle EOCF.

Or, si l'on fait attention à l'égalité des deux triangles IBF et IBA, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si l'on en retranche les deux triangles IDO et OGB : de même le triangle IBF deviendra le rectangle EOCF, par le retranchement des triangles IEO et OBC égaux aux deux premiers ; donc les deux rectangles ADOG et EOCF, restes des deux triangles, seront égaux entre eux, aussi bien que les rectangles ABCD et BFEG.

7.

Cette seconde manière de changer un rectangle en un autre confirme le principe que suppose la première, et qui aurait pu sem-

Digitized by Google

bler n'être appuyé que sur une simple induction.

De l'égalité des deux rectangles ABCD et BFEG on avait conclu qu'il fallait que AB fût à BG comme BF à BC; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'article précédent.

Car les triangles IAB et OGB, étant manifestement semblables, la base AB du grand sera à la base GB du petit comme la hauteur IA à la hauteur OG, ou comme BF à BC, leurs égales : donc AB sera à GB comme BF à BC, conformément au principe de l'article 5.

8.

De la manière dont on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles ABCD et BFEG, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC comme la base AB à la base BC, on démontrerait aussi que lorsque quatre lignes BF, BC, AB et BG, seront telles que la première sera à la seconde comme la troisième à la quatrième, le rectangle qui aurait pour hauteur et pour base la première et la quatrième de ces lignes, serait égal au rectan-

gle qui aurait pour hauteur et pour base la seconde et la troisième.

9.

Lorsque quatre quantités, ainsi que les lignes précédentes BF, BC, AB et BG, sont telles que la première sera à la seconde comme la troisième à la quatrième, on dit que ces quatre quantités sont en proportion ou qu'elles forment une proportion. Ainsi, 6, 9, 18 et 27, sont en proportion, parce que 6 est contenu dans 9 de la même manière que 18 est contenu dans 27. Il en est de même de 15, 25, 75 et 125, etc.

10.

La première et la quatrième des quatre quantités d'une proportion s'appellent termes extrêmes ou simplement *extrêmes*; la seconde et la troisième se nomment *termes moyens* ou simplement *moyens*.

En se servant des définitions précédentes, il est clair que les propositions renfermées dans les articles 7 et 8 s'énonceront ainsi :

11.

Lorsque quatre quantités sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

12.

Si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités seront en proportion.

13.

Il est à propos de faire beaucoup d'attention aux deux articles précédens; ils sont d'un grand usage. On en déduit, entre autres choses, la démonstration de la règle qu'on appelle en Arithmétique, *règle de trois*. Pour donner une idée de cette règle, nous prendrons un exemple; c'est la manière la plus simple de se faire entendre.

Supposons que 24 ouvriers aient fait 30 toises d'ouvrage en un certain temps, on demande

combien 64 ouvriers en feront dans un temps égal.

Il est évident que pour résoudre la question, il faut trouver un nombre qui soit à 64 dans la même raison que 30 à 24. Or, suivant ce que nous avons vu, ce nombre sera tel que son produit par 24 égalera le produit de 30 par 64; mais le produit de 30 par 64 est 1920; donc le nombre cherché sera celui qui, étant multiplié par 24, donnera 1920. Or, pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'apercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est-à-dire 80.

En général, pour trouver le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seront donnés, il faudra prendre le produit du second et du troisième, et diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

14.

Un exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la méthode précédente. Le

bon sens seul ferait trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, et qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourrait chercher plus longtemps le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

Par exemple, on veut un quatrième terme proportionnel aux trois nombres 259, 407 et 483.

Pour le trouver par la méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, et diviser 196581, qui en est le produit, par 259; ce qui donne 759 pour le quatrième terme cherché.

Si l'on s'y était pris autrement pour trouver ce terme, ce n'aurait pu être qu'en tâtonnant. On aurait bien pu découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 sur 259, contient quatre des septièmes parties de 259; qu'ainsi il fallait ajouter de même à 483 le nombre 276, qui contient quatre de ses septièmes parties. Mais la généralité et la sûreté de la méthode précédente nous sauve toujours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendraient inutiles dans bien des cas.

15.

Lorsqu'on aura deux quarrés à ajouter, leur addition se fera de la même manière que celle de deux rectangles, puisque les quarrés sont des rectangles dont la hauteur et la base sont égales. On changera donc un des quarrés, le plus petit, par exemple, en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur, et les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourrait donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux, ou une autre hauteur à volonté; mais ce qu'on ne pouvait guère manquer de se proposer, lorsqu'on a voulu réduire ainsi deux quarrés en une seule figure, c'était de faire un quarré égal à deux autres; problème dont il était aisé de trouver la solution suivante.

16.

Supposons d'abord que les deux quarrés ABCD et CBFE, dont on se propose de faire un seul quarré, soient égaux entre eux. Il est aisé de remarquer que si l'on tire les diagonales AC Fig. 60.

et CF, les triangles ABC et CBF feront ensemble la valeur d'un quarré : donc en transportant au-dessous de AF les deux autres triangles DCA et CEF, on fera le quarré ACFG dont le côté AC sera la diagonale du quarré ABCD, et dont la superficie égalera celle des deux quarrés proposés; ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

17.

Supposons présentement qu'on veuille faire un quarré égal à la somme des deux quarrés inégaux ADC*d* et CFE*f*, ou, ce qui revient au même, qu'on se propose de changer la figure ADFE*fd* en un quarré.

Fig. 61.

En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible de trouver dans la ligne DF quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH et HE, et faisant tourner les triangles ADH et EFH autour des points A et E, jusqu'à ce qu'ils aient les positions A*dh* et E*fh*, ces deux triangles se joignent en *h*;

2°. Que les quatre côtés AH, HE, E*h* et *h*A

soient égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or, ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF; car de l'égalité supposée entre DH et CF, il suit premièrement que si l'on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position A*dh*, le point H arrivé en *h*, sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH et CF il suit encore que HF égalera DC, et qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position E*fh*, le point H arrivera au même point *h*, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFE*fd* sera changée en une figure de quatre côtés AHE*h*. Il ne s'agit donc plus que de voir si les quatre côtés seront égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or, l'égalité de ces quatre côtés est évidente, puisque A*h* et *h*E seront les mêmes que AH et HE, et que l'égalité de ces deux derniers se tirera de ce que DH étant égal à CF ou à FE, les deux triangles ADH et HEF seront égaux et semblables.

Il ne reste donc plus qu'à voir si les côtés de

la figure AHE*h* formeront des angles droits ; c'est de quoi il est aisé de s'assurer en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A, pour arriver en *h*A*d*, il faudra que le côté HA fasse le même mouvement que le côté AD. Or, le côté AD fera un angle droit DA*d*, en devenant A*d*; donc le côté AH fera aussi un angle droit HA*h* en devenant A*h*.

Quant aux autres angles H, E et *h*, il est visible qu'ils seront nécessairement droits ; car il ne serait pas possible qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

18.

Si on remarque que les deux quarrés ADC*d* et CFE*f* sont faits, l'un sur AD, moyen côté du triangle ADH, l'autre sur EF égal à DH, petit côté du même ADH; et que le quarré AHE*h* égal aux deux autres, est décrit sur le grand côté AH, qu'on nomme communément l'hypoténuse du triangle rectangle, on découvrira bientôt cette fameuse propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuse est

égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

19.

Donc, lorsque de deux quarrés HDLK et ABCD on n'en voudra faire qu'un seul, il sera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre et de les décomposer, comme on a fait dans l'article 17; il suffira de placer leurs côtés AD et DH de façon qu'ils fassent un angle droit, et de tirer ensuite la ligne AH, puisqu'alors cette ligne sera le côté du quarré cherché AHIE. Fig. 62 et 63. Fig. 64.

20.

Si l'on avait deux figures semblables DAFGM et DHPON, et qu'on se proposât d'en faire une troisième, égale en superficie aux deux autres prises ensemble, il ne faudrait que poser les bases AD et HD de ces figures sur les deux côtés d'un angle droit ADH, et l'hypoténuse AH du triangle ADH serait la base de la figure demandée. Fig. 65 et 66. Fig. 67.

Pour en voir la raison, qu'on imagine les quarrés ABCD, DHKL et AHIE faits sur les

bases des trois figures semblables; on verra d'abord, par l'article 18, que le quarré AHIE vaudra lui seul les deux autres quarrés ABCD et DHKL. Or, les figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (Ire part., art. 47); donc les trois quarrés ABCD, DHKL et AHIE se trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON et AHQRS.

D'où il sera aisé de conclure que la figure AHQRS vaudra les deux autres. Supposons, par exemple, que chacun de ces quarrés fût la moitié de la figure dans laquelle il serait renfermé, personne ne douterait que la figure AHQRS ne fût égale aux deux autres, puisque sa moitié vaudra seule les moitiés des deux figures DHPON et DAFGM. Il en serait de même si les quarrés ABCD, DHKL et AHIE étaient les deux tiers, les trois quarts, etc., des figures DAFGM, DHPON et AHQRS.

21.

Si l'on se proposait d'ajouter trois, quatre, etc., figures semblables, ou, ce qui revient

au même, trois, quatre, etc., quarrés, la méthode serait toujours la même. Qu'on voulût, par exemple, en ajouter trois, on ferait d'abord un quarré égal aux deux premiers; ensuite, à ce nouveau quarré on ajouterait le troisième, et par là on aurait un quarré égal aux trois quarrés proposés.

22.

De là il suit que si l'on se proposait de faire un quarré, cinq, six, etc., fois plus grand qu'un autre, il suffirait de suivre la méthode précédente pour résoudre ce problème, et même son inverse, c'est-à-dire pour faire un quarré qui ne serait que la cinquième, la sixième, etc., partie d'un quarré proposé; ce qui demanderait simplement qu'on se rappelât la manière de trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données. Mais dans la troisième partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe et plus commode pour résoudre ces sortes de problèmes.

23.

L'addition des figures semblables fournit une

preuve décisive de la nécessité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une manière qui puisse se démontrer rigoureusement.

Supposons, par exemple, qu'on eût à faire un quarré double d'un autre; ceux qui ne sauraient pas la méthode donnée dans l'article 16, s'y prendraient vraisemblablement de la manière suivante.

Ils diviseraient le côté du quarré donné en un grand nombre de parties, en 100 parties, par exemple; ensuite multipliant 100 par 100, ils trouveraient 10000 pour la valeur du quarré; ce qui donnerait 20000 pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireraient pas la manière de le décrire, il faudrait qu'ils eussent son côté exprimé par un nombre, et que ce nombre fût tel, qu'en le multipliant par lui-même, c'est-à-dire en le quarrant, le produit donnât 20000.

Or ce nombre dont ils auraient besoin, ce serait en vain qu'ils le chercheraient sur une échelle dont les parties seraient des centièmes du côté du premier quarré; car 141, multiplié

par lui-même, donnerait 19881, et 142 donnerait 20164; ce qui s'écarterait de part et d'autre du nombre qu'ils devraient trouver.

Peut-être s'imagineraient-ils qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouveraient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier; mais quelques essais qu'ils pussent faire, ils trouveraient toujours que ce serait en vain qu'ils chercheraient deux nombres, dont un exprimerait le côté, ou, suivant le langage ordinaire, la racine d'un quarré, et l'autre, le côté ou la racine du quarré double.

24.

En effet, on démontre en Arithmétique que si deux nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre, c'est-à-dire si l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois, le quarré du plus grand ne sera pas non plus multiple du quarré du plus petit. Ainsi 5, par exemple, ne pouvant pas se diviser exactement par 4, son quarré 25 ne pourra pas non plus se diviser par 16, quarré de 4.

Donc si l'on quarre deux nombres dont l'un soit plus grand que l'autre, et en soit cependant moins que le double, il viendra, par cette opération, deux autres nombres, dont l'un sera moindre que le quadruple de l'autre, mais sans en pouvoir être ni le double ni le triple. Donc, qu'on divise le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra, le côté du quarré double qui, suivant ce qui est démontré dans l'article 16, sera la diagonale de ce quarré, ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties; ce qu'on exprimerait dans le langage des géomètres, en disant que le côté du quarré et sa diagonale sont incommensurables.

25.

On peut encore remarquer qu'il y a quantité d'autres lignes qui n'ont aucune commune mesure.

Car, qu'on écrive les deux suites

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, etc.,

dont la première exprime les nombres naturels,

et l'autre leurs quarrés, on verra que, comme les nombres qui seront entre 4 et 9, entre 9 et 16, entre 16 et 25, etc., n'auront aucune racine, les côtés des deux quarrés, dont l'un sera ou triple, ou quintuple, ou sextuple, etc., de l'autre, seront incommensurables entre eux.

26.

Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. On a vu qu'en comparant ces figures (Ire part., art. 34 et suiv.), nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle qui pouvait également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui maintenant paraîtrait devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas, et que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auraient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications.

27.

Reprenons d'abord ce qui est dit dans l'article 39 de la première partie, et voyons s'il est exactement vrai que les triangles, tels que *abc* et ABC, dont les angles sont les mêmes, aient leurs côtés proportionnels. Supposons, par exemple, que la base du premier étant *ab*, celle du second soit une droite AB égale à la diagonale d'un quarré dont *ab* serait le côté, et cherchons si, dans cette supposition, le rapport de AC à *ac* sera le même que celui de AB à *ab*.

Fig. 68 et 69.

Quoique, suivant ce que nous avons vu, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on supposerait arbitrairement dans *ab*, AB ne pourrait jamais contenir un nombre exact de ces parties; il est cependant aisé de s'apercevoir que plus ce nombre sera grand, plus AB approchera d'être mesuré exactement avec les parties de *ab*. Supposons *ab* divisé en 100 parties, ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 et 142 (article 23). Contentons-nous de 141, et négligeons le petit reste; il

est clair (Ire part., art. 39) que AC contiendra aussi 141 des parties de *ac*.

Supposons ensuite *ab* divisé en 1000 parties; ce que AB contiendra des parties de *ab* sera entre 1414 et 1415. Ne prenons que 1414, et négligeons encore le reste; on trouvera de même que AC contiendra 1414 des millièmes parties de *ac*, et qu'en général AC contiendra toujours autant de parties de *ac*, avec un reste, que AB contiendra de parties de *ab*, avec un reste.

De plus, ces restes, comme nous venons de l'observer, seront de part et d'autre d'autant plus petits, que le nombre des parties de *ab* sera plus grand : donc il sera permis de les négliger si l'on imagine la division de *ab* poussée jusqu'à l'infini; donc on pourra dire alors que le nombre des parties de *ac* que contiendra AC, égalera le nombre des parties de *ab* que contiendra AB, et qu'ainsi AC sera à *ac* comme AB à *ab*.

Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés aient une commune mesure, ou qu'ils n'en aient pas.

La proposition (Ire part., art. 45) d'où se tire la proportionnalité des lignes qui se répondent dans les figures semblables, se justifierait de la même façon.

28.

On verra par de pareils raisonnemens que les propositions expliquées dans les articles 44 et 47 de la première partie, où l'on a fait voir que les aires des triangles et des figures semblables ont entre elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues, sont toujours vraies en général, même lorsque les côtés de ces figures sont incommensurables.

Prenons pour exemple les triangles semblables ABC, *abc*, dont nous supposerons les hauteurs incommensurables avec leurs bases. Dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il soit, qui puisse servir de commune mesure à ces triangles et aux quarrés faits sur leurs bases, c'est-à-dire que les aires *abc* et *abde* seront incommensurables entre elles, ainsi que les aires ABC et ABDE; mais il n'en sera pas moins vrai que le triangle ABC sera au quarré ABDE comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

C'est de quoi on s'assurera en observant que plus les parties de l'échelle dont on se servira pour mesurer AB et KC seront supposées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à ABDE; donc divisant toujours l'échelle du triangle *abc* dans le même nombre de parties, et négligeant les restes, on verra que les mêmes nombres serviraient toujours à exprimer le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, et celui du triangle *abc* au quarré *abde*. Qu'on pousse, par la pensée, la division des échelles jusqu'à l'infini, les restes deviendront absolument nuls, et l'on pourra dire que les nombres qui exprimeraient le rapport du triangle *abc* au quarré *abde* exprimeraient aussi le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, et qu'ainsi le triangle *abc* sera au quarré *abde* comme le triangle ABC au quarré ABDE.

Il en serait de même de toutes les figures semblables.

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

TROISIÈME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

Après être parvenu à mesurer toutes sortes de figures rectilignes, on a voulu avoir la manière de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les terrains, et en général les espaces dont il s'agit de chercher la mesure, ne sont pas toujours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes et les figures mixtes, c'est-à-dire celles qui sont bornées par des lignes droites et par des lignes courbes, peuvent se réduire à des figures entièrement rectilignes, comme nous l'avons déjà dit; car qu'on
Fig. 70. eût à mesurer une figure telle que ABCDEFG,

on pourrait prendre le côté AD pour un assemblage de deux, de trois, etc., lignes droites. Substituant ensuite la droite FD à la courbe FED, on aurait la figure rectiligne ABCDFG, qui différerait si peu de la figure mixte, que l'une pourrait être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

On opérerait donc sur ces figures en suivant les méthodes précédentes. Mais les géomètres ne s'accommoderaient guère de ces sortes d'opérations; ils n'en veulent que de rigoureuses. D'ailleurs, il y a tel cas où la transformation d'une figure curviligne ou mixte en une figure entièrement rectiligne, demanderait qu'on partageât son contour en un si grand nombre de parties, qu'alors la méthode commune deviendrait impraticable. Aussi ne serait-on pas tenté de la suivre, si l'on avait à mesurer un espace tel que Z, ou le cercle entier X; il faudrait prendre une autre voie pour trouver la mesure de ces sortes d'espaces. Ici, nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle. Fig. 76 et 72.

1.

Supposons d'abord qu'on ait l'aire du cercle
Fig. 72. X à mesurer. On observera qu'en lui inscrivant un polygone régulier BCDE, etc., plus ce polygone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or, on a vu que l'aire d'un polygone (Ire part., art. 22) est égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothème AH, que le polygone a de côtés; ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour mesure le produit du contour entier BCDE, etc., par la moitié de l'apothème : donc, puisqu'en poussant jusqu'à l'infini le nombre des côtés du polygone, son aire, son contour et son apothème égaleront l'aire, le contour et le rayon du cercle, la mesure du cercle sera le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

2.

Fig. 73. Il suit de là que la superficie d'un cercle BCD est égale à celle d'un triangle ABL, dont la hauteur serait le rayon AB, et la base une droite BL égale à la circonférence.

3.

Il ne s'agit donc que d'avoir le rayon et la circonférence. A l'égard du rayon, il est aisé de le mesurer; il n'en est pas de même de la circonférence. Cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle d'un fil, ce qui, dans beaucoup d'occasions, suffit pour la pratique.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mesurer géométriquement la circonférence du cercle, c'est-à-dire à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent-milliémes, à des millioniémes près, et même on en approche tant qu'on veut, sans que pour cela on puisse le déterminer rigoureusement.

4.

L'approximation la plus simple qu'on ait trouvée est celle qu'on tient d'Archimède. Le diamètre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties est entre 21 et 22; et l'on sait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

5.

Au reste, il est clair que si l'on savait exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on saurait celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons, ce rapport devant être le même dans tous les cercles. Cette proposition paraît si simple, qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée, puisqu'on sent que, quelles que fussent les opérations qu'on aurait faites pour mesurer une circonférence en se servant des parties de son rayon, il faudrait qu'on fît les mêmes opérations pour mesurer toute autre circonférence; qu'ainsi on lui trouverait le même nombre de parties de son rayon.

6.

Il est évident que les cercles ont encore la propriété générale de toutes les figures semblables (Ire part., art. 47); je veux dire que leurs surfaces sont en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues; mais comme, pour appliquer cette proposition aux cercles, on

ne pourra prendre leurs côtés, il faudra se servir des rayons ; alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

S'il ne paraissait pas d'abord que cette proposition dût suivre de ce qui est dit dans l'article 47 de la première partie, et qu'on voulût en avoir une démonstration particulière, on ferait attention qu'il reviendrait absolument au même de comparer les aires de deux cercles BCD et EFG, ou celles des triangles ABL et AEM qui leur seraient égaux (article 2), en supposant que leurs bases BL et EM fussent les développemens des circonférences BCD et EFG, et que leurs hauteurs fussent les rayons AB et AE. Or, par l'article précédent, ces triangles seraient semblables; donc leurs aires seraient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB et AE, rayons des cercles BCD et EFG; donc, etc. Fig. 73 et 74.

7.

Les cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les figures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois cô-

tés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon sera l'hypoténuse égalera les deux autres pris ensemble.

Ainsi, on pourra toujours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, et cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau de fontaine par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux donnés, on y réussira sans peine en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

8.

Si l'on avait à mesurer la superficie d'une
Fig. 75. couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG et BCD, c'est-à-dire entre deux cercles qui auraient un centre commun; ce qui se présenterait d'abord, ce serait de mesurer séparément les superficies des deux cercles, et de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'apercevoir que le

problème peut se résoudre d'une manière plus commode pour la pratique.

Imaginons un triangle ABL qui ait le rayon AB pour hauteur, et dont la base soit une droite BL égale à la circonférence BCD. Si l'on mène par le point E la droite EM, parallèle à BL, cette droite sera égale à la circonférence EFG; car, à cause de la similitude des triangles AEM et ABL, il y aura même proportion entre AB et BL, qu'entre AE et EM. Or, par la supposition, BL égalera la circonférence dont AB sera le rayon; donc EM égalera aussi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en serait de même de toute autre ligne KI parallèle à BL; elle serait toujours égale à la circonférence dont AK serait le rayon.

De l'égalité supposée entre la circonférence EFG et la droite EM, suit nécessairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il faut que l'espace rectiligne EBLM soit égal à la couronne proposée V. Or, cet espace EBLM se peut aisément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI et IL, et en menant à BL par le point I la

perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajouté MHI, égal au triangle retranché PLI.

Donc si par le point I on mène à BL la parallèle IK qui coupera EB en deux parties égales, la couronne proposée, égale à l'espace EBLM ou à EBPH, aura pour mesure le produit de EB par KI, circonférence dont AK sera le rayon.

Donc pour mesurer une couronne V, il faut multiplier sa largeur EB par la circonférence KOQ, dite *moyenne* entre les circonférences BCD et EFG, parce qu'elle surpasse la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH, égale à PL, quantité dont elle est surpassée par la grande circonférence BCD, ou par la droite BL.

9.

Fig. 71. Lorsqu'il s'agira de mesurer une figure Y, composée d'arcs de cercle différens et de lignes
Fig. 76. droites, ou une figure Z uniquement composée d'arcs de cercle, toute la difficulté se réduira à mesurer des segmens de cercle, c'est-à-dire des espaces tels que ABCE, terminés par un arc
Fig. 77. ABC et par une corde AC; car les figures en-

tièrement composées d'arcs de cercle, ou d'arcs et de lignes droites, peuvent toutes être considérées comme des figures rectilignes, augmentées ou diminuées de certains segmens.

10.

La mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver lorsqu'on sait celle du cercle; car, qu'on tire les lignes AT et CT au centre T de l'arc, on formera une figure ABCT, appelée *secteur*, dont l'aire sera au cercle comme l'arc ABC à la circonférence entière, et qui par conséquent aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC. Or le secteur étant déterminé, il ne faudra plus qu'en retrancher le triangle ACT pour avoir le segment ABCE.

11.

Comme il arrive assez souvent que lorsqu'on se propose de mesurer une figure telle que Y, Fig. 71. on n'a pas le centre de l'arc HIK, et que cependant, sans ce centre, on ne saurait mesurer la figure, puisque la méthode précédente exige

la connaissance du rayon, il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque.

Soit ABC l'arc de cercle proposé. Si l'on prend à volonté deux points A et B sur cet arc, et que de ces points, comme centres, on décrive
Fig. 78. les quatre arcs *goi*, *foh*, *lpk* et *mpn*, les deux premiers d'un rayon quelconque, et les deux autres ou de ce même rayon ou de tel autre rayon qu'on voudra, il est clair que le centre cherché de l'arc ABC sera sur la ligne *op* qui joindra les points d'intersection *o* et *p*.

Choisissant ensuite un troisième point C sur l'arc ABC, et se servant de B et de C de la même manière qu'on s'est servi de A et de B, on aura une droite *qr*, sur laquelle devra encore se trouver le centre demandé; donc ce centre sera le point de rencontre T des lignes *op* et *qr*.

12.

Ainsi, quelque arrangement qu'on donne à trois points, pourvu qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toujours les lier par un arc de cercle; ou, ce qui revient au même,
Fig. 79. quelle que soit la proportion des côtés AC et

BC d'un triangle ACB avec sa base, on pourra toujours circonscrire un cercle à ce triangle.

13.

La méthode que nous venons de donner pour circonscrire un cercle à un triangle étant appliquée successivement à différens triangles ABC, AEB et AGB, plus ou moins élevés à l'égard de leur base AB, on s'aperçoit qu'en passant d'un triangle ACB, dont l'angle au sommet est fort aigu, à d'autres triangles AEB et AGB dont l'angle au sommet est plus ouvert, le centre du cercle circonscrit s'approche continuellement de AB, et que ce centre passe ensuite au-dessous de AB, lorsque l'angle au sommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or, voyant passer ce centre au-dessous de AB, après l'avoir vu au-dessus, il doit venir dans l'esprit, ce me semble, de chercher de quelle espèce est le triangle AFB, lorsque le cercle circonscrit a son centre sur AB même.

Fig. 79 et 80.

Fig. 81.

Pour connaître ce triangle AFB, on commencera par remarquer que, dans ce cas particulier, la portion du cercle circonscrite au

triangle doit être exactement un demi-cercle. En effet, le centre du cercle devant se trouver sur la base AB, dont les deux extrémités sont, par la supposition, dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être situé précisément au milieu de AB, de sorte que AB sera nécessairement un diamètre.

On verra ensuite que de quelque point F du demi-cercle qu'on tire les lignes FA et FB, l'angle AFB sera droit; car menant FM, les deux triangles AFM et MFB seront isocèles : donc les deux angles AFM et MFB seront respectivement égaux aux angles FAM et FBM, ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la somme des deux angles FAM et FBM; mais les trois angles AFB, FAM et FBM pris ensemble valent deux droits; donc l'angle AFB sera droit.

Ainsi, si l'on décrit sur la base AB un triangle rectangle quelconque, ce triangle aura la propriété demandée d'être inscrit dans un cercle dont le centre est sur la base.

14.

Cette propriété du cercle, que l'angle qui a

son sommet dans la demi-circonférence et qui est appuyé sur le diamètre est toujours droit, porte à chercher si les autres parties du cercle n'auraient pas quelque propriété analogue; si, par exemple, les angles ACB, AEB et AFB, Pl. V, fig. 82. pris dans un segment ACEFB, ne seraient pas tous égaux entre eux, ainsi que le sont ceux du demi-cercle.

Pour nous en assurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, et nous verrons ensuite si les autres ont la même valeur. Nous prendrons, par exemple, l'angle AEB, dont le sommet E est placé au milieu de Fig. 83. l'arc AEB. Comme la ligne EDG qui passe par le centre D, coupe cet angle en deux parties égales, il suffira de mesurer l'angle AEG sa moitié, ou, ce qui revient au même, il suffira de savoir quelle partie l'angle AEG est d'un angle déjà mesuré, tel que ADG. Je dis que l'angle ADG est déjà mesuré, parce que nous savons que l'arc AG est sa mesure (Ire part., art. 52).

Si l'on fait attention que le triangle AED est isocèle, on verra facilement que l'angle AEG est la moitié de l'angle ADG; car les angles AED et EAD (Ire part., art. 31) sont égaux.

Mais (Ire part., art. 67) ces deux angles, pris ensemble, valent l'angle extérieur ADG; donc l'angle AED ou AEG est la moitié de l'angle ADG.

Par la même raison, l'angle DEB sera la moitié de l'angle GDB; donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB; donc sa mesure sera la moitié de l'arc AGB.

15.

L'angle AEB étant mesuré, pour savoir s'il est égal à chacun des autres angles qui ont leur sommet dans le même segment, il faut exami-
Fig. 84. ner si un de ces angles pris à volonté, AFB, par exemple, est aussi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en assurera facilement en tirant la droite FDG par le centre; car alors on verra que l'angle AFB sera composé de deux autres AFD et DFB, qui seront, par l'article précédent, les moitiés des angles ADG et GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB sera la moitié de l'angle ADB; et en appliquant le
Fig. 82. même raisonnement à tous les angles ACB, AEB et AFB, qui ont leurs sommets à la cir-

conférence, et qui s'appuient sur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles sont égaux entre eux, ainsi que nous l'avions soupçonné dans l'article précédent.

16.

Parmi les différens angles qui ont leur sommet dans l'arc ACEFB, il y en a qui pourraient d'abord ne pas paraître compris dans la démonstration précédente : ce sont des angles AFB, Fig. 85.
tels que la droite FDG, tirée par le centre, passe hors de l'angle ADB. Cependant, en remarquant toujours que l'angle GEA est la moitié de l'angle GDA, et l'angle DFB la moitié de l'angle GDB, on verra que l'angle AFB, excès de l'angle DFB sur l'angle DFA, sera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB, excès de l'angle GDB sur GDA.

17.

Par les figures dont nous nous sommes servis, il semblerait aussi que la démonstration précédente ne conviendrait qu'aux segmens plus grands qu'un demi-cercle; mais il est aisé de

Fig. 86. voir qu'un angle quelconque, tel que AFB, qui aurait son sommet dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, serait toujours composé de deux autres DFB et DFA, moitiés des angles BDG et ADG; et par conséquent, que cet angle AFB aurait pour mesure la moitié des deux arcs BG et AG, c'est-à-dire la moitié de l'arc AGB.

18.

Après avoir vu que dans un même segment Fig. 87. les angles AEB, AFB et AHB, supposés à la circonférence, sont tous égaux, on est tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorsque son sommet se confond avec le point B, extrémité de la base AB. Cet angle s'évanouirait-il alors? Mais il ne paraît pas possible que, sans s'être resserré par degrés, il vienne tout à coup à s'anéantir. On ne voit pas quel serait le point au-delà duquel cet angle cesserait d'exister; comment donc parviendra-t-on à en trouver la mesure? c'est une difficulté qu'on ne peut résoudre sans recourir à la Géométrie de l'infini, dont tous les hommes ont au moins une idée imparfaite qu'il ne s'agit que de développer.

Observons d'abord que, quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, etc., la droite EB s'accourcit continuellement, et que l'angle EBA, qu'elle fait avec la droite AB, s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en sera pas moins un angle, puisque pour le rendre sensible, il ne faudrait que prolonger la ligne accourcie QB vers R. En doit-il être de même lorsque la ligne QB, à force de diminuer, s'est réduite enfin à zéro? qu'est devenue alors sa position? qu'est devenu son prolongement?

Il est évident qu'il n'est autre chose que la droite BS qui touche le cercle en un seul point B, sans le rencontrer en aucun autre endroit, et que, pour cette raison, on appelle *tangente*.

De plus, il est clair que pendant que la ligne EB diminue continuellement jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, qui devient successivement AF, AH et AQ, etc., s'approche toujours de AB, et qu'elle se confond enfin avec elle : donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB et AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait par la corde AB et par la tangente BS; et cet angle, qu'on appelle

angle au segment, doit toujours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumés de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les commençans trouvaient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre en leur expliquant la principale propriété des tangentes.

19.

Cette propriété est qu'une tangente au cercle
Fig 88. dans un point quelconque B doit être perpendiculaire au diamètre IDB, qui passe par ce point; car comme la courbure du cercle est si uniforme qu'un diamètre quelconque IDB le partage en deux demi-cercles IAB et IOB, égaux et également situés à l'égard de ce diamètre, il

faut que les deux parties BS et BH de la tangente commune à ces deux demi-cercles soient aussi également situées à l'égard de ce diamètre. Or, cela ne saurait être sans que IDB ne soit perpendiculaire à la tangente HBS.

20.

De là, on verra facilement pourquoi l'angle au segment ABS a pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Car l'angle ADB joint avec les deux angles égaux DAB et DBA, fait (Ire part., art. 64) deux angles droits; donc la moitié de l'angle ADB, jointe avec l'angle DBA, fait un droit. Mais l'angle DBA, ajouté avec l'angle ABS, donne aussi un droit : donc l'angle ABS est égal à la moitié de l'angle ADB ; donc la mesure de ABS sera la moitié de l'arc AGB.

21.

La seconde démonstration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour mesure la moitié de l'arc AGB, fournit la solution du problème suivant.

Fig. 89 et 90. Décrire sur AB un segment de cercle capable de l'angle formé L, c'est-à-dire un segment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence soient égaux à l'angle L.

Pour résoudre ce problème, il faudra faire en A et en B les angles BAS et ABS, chacun égal à l'angle L, et élever sur AS et sur BS les deux perpendiculaires AD et BD. Leur rencontre D sera le centre de l'arc cherché AFB.

Car, par l'article 19, les droites BS et AS seront les tangentes du cercle dont le centre est D et le rayon AD ou BD, puisque BD ou AD sont perpendiculaires à BS et à AS. De plus, par l'article précédent, l'angle ABS a pour mesure la moitié de AGB, et, par l'article 15, les angles tels que AFB sont aussi mesurés par la moitié de AGB; donc ces angles AFB seront égaux à ABS, c'est-à-dire à l'angle L, ainsi qu'on le demandait.

22.

La découverte des propriétés des segmens de cercle, que nous venons d'expliquer, est due vraisemblablement à la simple curiosité des géomètres; mais il en a été de cette décou-

verte comme il en est tous les jours de beaucoup d'autres : ce qu'on ne croyait pas d'abord utile, le devient par la suite. On a fait dans la pratique des applications fort heureuses des propriétés du cercle que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une seule de ces applications; on la trouve dans la solution du problème suivant, qui est souvent nécessaire dans la Géographie.

A, B et C sont trois lieux dont on connaît les distances respectives AB, BC et AC; il s'agit de savoir à quelle distance de ces lieux est un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois, mais d'où l'on ne peut sortir pour opérer sur le terrain. Fig. 91.

On commencera par tracer sur le papier trois points *a*, *b* et *c*, qui soient situés entre eux de la même manière que les trois points A, B et C, c'est-à-dire, en langage géométrique, qu'on fera le triangle *abc* semblable au triangle ABC. Fig. 91 et 92.

Ayant observé ensuite avec le demi-cercle la grandeur des angles ADB et BDC, on fera sur *ab* le segment de cercle *adb* capable de l'angle ADB; et sur la droite *bc*, le segment de cercle *bdc* capable de l'angle BDC. La rencontre *d* de

ces deux segmens désignera, sur le papier, la position du lieu D, c'est-à-dire que les lignes *da*, *db* et *dc* seront en même proportion à l'égard de *ab*, *bc* et *ac*, que les distances cherchées DA, DB et DC, à l'égard des distances données AB, BC et AC : ce qui n'a pas besoin de démonstration après ce qu'on a vu sur les figures semblables.

23.

On pourrait facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres secours des propriétés du cercle qu'on vient de démontrer; mais il est plus à propos de passer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des précédentes et qui ont eu aussi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés, nous commencerons par remar-
Fig. 93. quer que deux angles quelconques EDC et EBC, qui s'appuient sur le même arc EC, étant égaux, il s'ensuit que les triangles DAE et BAC ont les angles égaux, c'est-à-dire (Ire part., art. 39) que ces triagles sont semblables.

Car par la même raison que l'angle EDC est égal à l'angle EBC, l'angle DEB sera égal à l'an-

gle DCB; et quant aux angles DAE et BAC, ils seront visiblement égaux, soit parce qu'ils sont faits de mêmes lignes, soit parce que deux triangles, dont l'un a deux angles respectivement égaux à deux angles de l'autre, ont aussi nécessairement le troisième angle égal (Ire part., art. 38).

Pour reconnaître plus facilement ensuite dans les triangles ADE et ABC, les propriétés générales des triangles semblables, nous appliquerons le triangle DAE sur le triangle BAC, en posant AD sur AB, et AE sur AC, afin que DE soit parallèle à BC. Nous nous rappellerons alors, Fig. 93 et 94.

1°. Que si deux triangles ADE et ABC sont semblables, les quatre côtés AC, AE, AB et AD sont en proportion (Ire part., art. 39);

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (IIe part., art. 8), et nous conclurons de là que le rectangle ou le produit de AC par AD est égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle très remarquable, et qu'on peut énoncer ainsi : si dans un cercle on tire à volonté deux droites qui se coupent, le produit des

deux parties de la première est égal au produit des deux parties de la seconde.

24.

Fig. 95. Si les deux droites BE et DC se coupaient perpendiculairement, et que l'une de ces deux droites fût un diamètre DC, il est clair que les deux parties AB et AE de l'autre droite BE seraient égales entre elles; de sorte que la propriété précédente s'énoncerait ainsi dans ce cas particulier : si sur le diamètre DC d'un cercle on élève une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire sera égal au rectangle de AD par AC.

25.

Il arrive souvent qu'on a besoin de changer un rectangle en un quarré : l'article précédent
Fig. 96. en fournit un moyen facile. Soit ACFE le rectangle proposé; on prolongera AC en D, de sorte que AD soit égal à AE, et l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamètre soit DC. Prolongeant ensuite le côté EA jusqu'à ce qu'il

rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté du quarré cherché ABGH, égal au rectangle donné ACFE.

26.

On propose souvent un problème qui n'est que celui que nous venons de résoudre présenté autrement, c'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données. On entend alors par la moyenne proportionnelle, la ligne qui est aussi grande par rapport à la plus petite des deux lignes données, qu'elle est petite par rapport à la plus grande, c'est-à-dire que si AB, par exemple, est moyenne proportionnelle entre AD et AC, on pourra dire que AD est à AB comme AB est à AC. Or, il est bien aisé de voir que ce problème est le même que le précédent, puisque (IIe part., art. 8) le produit de AD par AC, c'est-à-dire le rectangle de ces deux lignes, sera égal au produit de AB par AB, c'est-à-dire au quarré de AB.

Donc lorsqu'on voudra trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on

changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté sera la ligne cherchée.

27.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre manière qui suit de la propriété du cercle expli-
Fig. 97. quée dans l'article 13. Supposons que AC soit la plus grande des deux lignes données, et AD la plus petite; on élèvera DB perpendiculairement sur AC, et le point B, où elle rencontrera le demi-cercle ABC tracé sur le diamètre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD et AC; car en tirant BC, il est clair que le triangle ABC sera rectangle en B; donc (Ire part., art. 38) ce triangle sera semblable au triangle ABD, puisque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun; mais si les triangles ADB et ABC sont semblables, ils ont leurs côtés proportionnels : donc AD est à AB comme AB à AC; donc AB est moyenne proportionnelle entre AD et AC.

28.

Si l'on voulait changer une figure rectiligne

quelconque en un quarré, il ne faudrait, pour ramener ce problème à l'article 25, que faire de cette figure un rectangle; ce qui serait fort facile, à cause que les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même base et même hauteur, et que tous les rectangles provenus des triangles ne seront plus qu'un seul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune (IIe part., art. 6).

29

Les figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle pourront aussi être changées en quarrés lorsqu'on aura mesuré par pratique la longueur des arcs dont elles seront composées; car on pourra alors changer ces figures, ainsi que les rectilignes, en rectangles. On aura recours pour cela aux articles 9 et 10, où l'on a appris à mesurer toutes sortes de figures circulaires.

30.

On tire encore de la propriété du cercle, ex-

pliquée dans l'article 24, une méthode bien facile pour faire un quarré qui soit à un quarré donné, en raison donnée, problème que nous avions promis dans l'article 22 de la seconde partie.

Supposons, par exemple, qu'on se propose de
Fig. 98. faire un quarré qui soit au quarré ABCD comme la ligne M à la ligne N. On divisera (Ire part., art. 41) le côté CB au point E, de manière que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M; menant ensuite la parallèle EF à AB, le rectangle ABEF aura la même superficie que le quarré demandé : donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

31.

Fig. 99 et 100. Si l'on veut faire un polygone HIKLM, qui soit à un polygone semblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du polygone donné ABCDE, le quarré ABGF; ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABGF comme la ligne X à la ligne Y; et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un poly-

gone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau polygone sera celui qu'on demande. La raison en est bien facile à trouver, si l'on se rappelle (Ire part., art. 48) que les figures semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

32.

Si l'on voulait faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné comme X à Y, il faudrait construire un quarré qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle comme X à Y, et le côté de ce nouveau quarré serait le rayon du cercle demandé.

33.

Voici encore une propriété du cercle, tirée de celle qui a fourni les problèmes précédens.

Si d'un point A, pris hors d'un cercle, on mène à volonté deux droites ABC et ADE, qui coupent chacune la circonférence en deux points, et qu'on mène les droites CD et BE, les triangles ACD et AEB seront semblables, puisque l'angle A est commun aux deux triangles, Fig. 101.

et qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C et E, égaux. Or, de ce que les triangles ACD et AEB sont semblables, il s'ensuit que les quatre lignes AB, AD, AE et AC sont en proportion, et par conséquent que le rectangle des deux droites AB et AC est égal au rectangle des deux droites AD et AE; ce qui peut s'exprimer ainsi : si d'un point quelconque A, pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC et AE qui traversent ce cercle, le rectangle de la droite AC, par sa partie extérieure AB, sera égal au rectangle de la droite AE par sa partie extérieure AD.

34.

Lorsque la droite qui part du point A, au lieu de couper le cercle ne fait simplement que le toucher, ainsi que AF, la propriété précédente se change en celle-ci : le quarré d'une tangente AF est égal au rectangle produit par la sécante quelconque AE, et par sa partie extérieure AD. Ce qui est bien aisé à démontrer; car regardant la droite AF qui touche le cercle, comme une ligne qui le couperait en deux

points infiniment proches, les lignes AB et AC ne sont alors qu'une même ligne AF, et, au lieu du rectangle de AB par AC, on a le quarré de AF.

35.

La proposition démontrée dans l'article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer, Fig. 102. on se ressouviendra (article 19) que le rayon FG est perpendiculaire à la tangente FA. Ainsi, il ne s'agit que de trouver sur le cercle donné le point F, tel que l'angle AFG soit droit; donc en décrivant sur AG un demi-cercle, le point où il coupera le cercle FKO sera (article 13) le point cherché F.

Digitized by Google

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

QUATRIÈME PARTIE.

De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

Les principes que nous avons établis dans les trois premières parties de cet Ouvrage pourraient nous suffire pour résoudre des problèmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer; mais il est plus dans l'ordre que nous avons suivi précédemment, de passer maintenant à la mesure des solides, c'est-à-dire des étendues terminées qui ont à la fois trois dimensions, longueur, largeur et profondeur.

Cette recherche a été, sans doute, un des premiers objets qui aient pu fixer l'attention des

géomètres. On aura voulu savoir, par exemple, combien il y avait de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB et la profondeur ou épaisseur BG étaient connues. Pl. VI, fig. 103. On se sera proposé de déterminer la quantité d'eau que contenait un fossé, ou un réservoir ABCD; on aura voulu trouver la solidité d'une tour, d'un obélisque, d'une maison, d'un clocher, etc. Fig. 104.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimensions, de la même manière que nous avons traité celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les solides qui sont terminés par des plans.

Nous n'aurons pas besoin de parler de la manière de mesurer les surfaces de ces corps; elles ne peuvent être que des assemblages de figures rectilignes, et par conséquent leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la première partie.

1.

Pour mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces on

les a toutes rapportées au quarré. Or, le solide le plus simple, c'est le cube, qui en effet est en solide ce que le quarré est en superficie; c'est-
Fig. 105. à-dire que c'est un espace tel que *abcdfgh*, dont la longueur, la largeur, et la profondeur sont égales, ou, ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six faces égales qui sont des quarrés.

On appelle *côté du cube*, le côté des quarrés qui lui servent de faces.

Par un pied cube, on entend un cube dont le côté est d'un pied; de même un pouce cube est un cube dont le côté est d'un pouce, etc.

2.

Les solides qu'on a le plus communément
Fig. 103. à mesurer sont des figures ABCDEFGH terminées par six faces rectangles ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH et ABGH. On appelle ces solides des *parallélépipèdes*, parce que leurs faces opposées conservant dans tous leurs points la même distance l'une de l'autre, sont dites parallèles, de même que les lignes ont aussi

été nommées *parallèles* lorsqu'elles conservaient partout la même distance.

3.

Or, si l'on se propose de mesurer des solides de cette espèce, l'analogie de ce problème avec celui où il s'est agi de la mesure des surfaces rectangles donnera un moyen facile de le résoudre.

On commencera par mesurer séparément la longueur AD, la largeur AB et la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, etc., on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés, et le produit qui viendra de cette multiplication exprimera combien le parallélépipède contiendra de pieds cubes, ou de pouces cubes, etc., suivant que les dimensions auront été mesurées en pieds ou en pouces, etc. Pour mieux montrer comment se fait cette opération, nous allons en donner un exemple.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, et la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (Ire part., art. 11)

aura six fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si l'on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE et AH, qui mesurent toutes également la profondeur du solide, soient partagées chacune en quatre parties égales, et que par les points de division correspondans on fasse passer autant de plans parallèles les uns aux autres ; ces plans diviseront le parallélépipède proposé en quatre autres parallélépipèdes qui auront chacun un pied de profondeur, et qui seront tous égaux et semblables. Or, l'inspection seule de la figure fait voir que le premier de ces parallélépipèdes contient 30 pieds cubes, puisque sa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés ; donc le solide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

4.

Nous ne nous arrêterons point à expliquer les différens moyens que l'on peut employer dans la pratique pour construire des parallélépipèdes, parce que ces moyens sont, pour la plupart, si aisés à trouver, qu'il n'y a personne qui ne les puisse imaginer. Mais nous donnerons la

formation suivante du parallélépipède, qui est plus utile à considérer que tous les autres.

Si l'on conçoit qu'un quarré ou rectangle ABGH se meuve parallèlement à lui-même, en sorte que ses quatres angles A, B, G et H parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF et HE, perpendiculaires au plan du rectangle ABGH; ce rectangle, par le mouvement que nous venons de décrire, formera le parallélépipède ABCDEFGH.

5.

Il est presque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne penche d'aucun côté sur ce plan; et de même, qu'un plan qui ne penche pas plus d'un côté que d'un autre sur un second plan est dit *perpendiculaire* à ce second plan. Ces deux définitions sont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

6.

Or il suit de là que la ligne AB, qui est Fig. 106.

perpendiculaire au plan X, doit être perpendiculaire à toutes les lignes AC, AD, AE, etc., qui partent du pied A de cette ligne et qui sont dans ce plan; car il est évident que si elle penchait sur une de ces lignes, elle serait inclinée vers quelque côté du plan : donc elle ne lui serait pas perpendiculaire.

7.

Pour se représenter d'une façon bien sensible comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son extrémité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la manière suivante.

On construira de quelque matière unie et facile à plier, comme du carton, un rectangle
Fig. 107. FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB perpendiculaire aux côtés ED et FG; on pliera ensuite ce rectangle, en sorte
Fig. 108. que le pli soit le long de la ligne AB, et on le portera tout plié sur le plan X. Il est évident que, quelle que soit l'ouverture que l'on donne aux deux parties FBAE et GBAD du rectangle plié EADGBF, ces deux parties res-

teront toujours appliquées sur le plan X, sans que la ligne AB change de position par rapport à ce plan : cette droite AB sera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son pied et qui seront dans le plan X, puisque les côtés AE et AD du rectangle plié s'appliqueront successivement sur chacune de ces lignes, par le mouvement que nous venons de décrire.

8.

On tire de la construction précédente une pratique bien commode pour élever un point donné sur un plan, une ligne perpendiculaire à ce plan, ou pour abaisser d'un point pris hors d'un plan une ligne qui soit perpendiculaire à ce plan. Car que le point proposé soit dans le plan, en A par exemple, ou qu'il soit hors du plan, comme en H, on pourra toujours faire avancer le rectangle EFBGDA sur le plan X, jusqu'à ce que le pli AB touche le point donné; et AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée. Fig. 109.

9.

Il suit aussi de là que la ligne AB sera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle sera perpendiculaire à deux lignes AE et AD de ce plan; car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliquerait sur AE et l'autre sur AD. Or ce pli ne pourrait manquer d'être perpendiculaire au plan X.

10.

Si l'on veut élever sur une ligne quelconque KL un plan perpendiculaire au plan X dans lequel est cette ligne, on pourra se servir encore pour cela du rectangle plié GBFEAD; car il ne faudra que poser sur la ligne KL le côté AD d'une des parties ADGB de ce rectangle plié, et le plan de cette partie ADGB sera celui que l'on demande.

11.

On verra facilement que si l'on posait un

troisième plan Y sur les deux côtés EB et BG du même rectangle plié, ce plan Y serait encore perpendiculaire à la ligne AB, et par conséquent parallèle au plan X. Fig. 110.

Donc si à un plan X on élève trois perpendiculaires EF, AB et DG d'égale longueur, et qui ne soient pas posées en ligne droite, le plan Y, qui passera par les trois points F, B et G, sera nécessairement parallèle au plan X.

12.

Lorsque deux plans ne seront pas parallèles, il sera facile de connaître l'angle qu'ils feront entre eux, en se servant encore de notre rectangle plié. Pour en venir à bout, nous appliquerons l'une des deux parties ABGD de ce rectangle sur le plan X; il est évident que EAD, ou son égal FBG, mesurera l'inclinaison du plan EABF sur le plan DABG. Or si l'on remarque que AB est la commune section de ces plans, et que EA et AD sont chacune perpendiculaire à AB, on en tirera sans peine la règle suivante. Fig. 111.

Deux plans qui ne sont pas parallèles étant

donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite qui est leur commune section; ensuite, d'un point quelconque de cette ligne, on lui mènera deux perpendiculaires qui soient chacune dans un de ces plans, et l'angle que feront entre elles ces deux perpendiculaires mesurera l'angle que les deux plans donnés font entre eux.

13.

Comme on s'aperçoit sans peine que, pendant le mouvement de ABFE autour du pli AB, la droite AE, dont l'extrémité E décrit un arc de cercle ED, ne sort jamais d'un plan EAHD perpendiculaire au plan X, et que l'inclinaison de la droite EA sur le plan X n'est autre chose que l'angle EAD, on découvre encore très facilement que l'inclinaison d'une droite quelconque EA sur le plan X est mesurée par l'angle EAH, fait entre cette ligne et la ligne AD, qui passe par A et par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH abaissée sur ce plan d'un point quelconque E de la droite AE.

14.

L'inspection seule de la figure dont on vient de se servir dans l'article précédent fournit un nouveau moyen d'abaisser d'un point E, hors d'un plan X, une ligne EH perpendiculaire à ce plan.

Ayant tiré une ligne quelconque BAS dans le plan X, on abaissera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A, où cette perpendiculaire tombe, on élèvera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB, et, abaissant ensuite du point donné E à la droite AD la perpendiculaire EH, cette ligne sera la perpendiculaire au plan X.

15.

On tire de là une seconde façon d'élever à un plan X une perpendiculaire MN, d'un point M donné sur ce plan.

Ayant abaissé d'un point quelconque E, pris hors du plan X, la perpendiculaire EH à ce plan, on mènera par le point donné M la droite

MN qui soit parallèle à HE, et elle sera la perpendiculaire au plan X.

16.

Après le parallélépipède, le solide le plus simple est le prisme droit. C'est une figure
Fig. 112. ABCDEFGHIKLM, dont les deux bases opposées et parallèles sont deux polygones égaux, et tellement placés, que les côtés GF, FE, etc., de l'un soient parallèles aux côtés BC, CD, etc., de l'autre, et dont les autres faces sont des rectangles ABGH, BGFC, etc.

17.

Les géomètres supposent ces figures formées, ainsi que les parallélépipèdes, par une base ABCDLM qui se meut parallèlement à elle-même, de façon que ses angles A, B, etc., suivent des lignes perpendiculaires au plan de la base.

18.

Pour distinguer les différentes espèces des

prismes droits, on ajoute le nom du polygone qui leur sert de base. Le prisme hexagonal, par exemple, est celui dont la base est un hexagone.

19.

Pour trouver la manière de mesurer toutes sortes de prismes droits, on observera d'abord que de deux prismes droits dont les bases seraient égales, celui qui aurait une plus grande hauteur serait plus grand en solidité, dans la même raison que sa hauteur serait plus grande.

20.

On remarquera ensuite que deux prismes droits qui auraient la même hauteur, mais dont l'un aurait une base qui contiendrait un certain nombre de fois la base de l'autre, seraient entre eux dans la même raison que leurs bases. La vérité de cette proposition s'aperçoit facilement en faisant attention à la formation des prismes, expliquée dans l'article 17.

Que *abcdefghiklm* et ABCDEFGHIKLM soient les deux prismes qui ont la même hau- Fig. 112 et 113.

MN qui soit parallèle à HE, et elle sera la perpendiculaire au plan X.

16.

Après le parallélépipède, le solide le plus simple est le prisme droit. C'est une figure
Fig. 112. ABCDEFGHIKLM, dont les deux bases opposées et parallèles sont deux polygones égaux, et tellement placés, que les côtés GF, FE, etc., de l'un soient parallèles aux côtés BC, CD, etc., de l'autre, et dont les autres faces sont des rectangles ABGH, BGFC, etc.

17.

Les géomètres supposent ces figures formées, ainsi que les parallélépipèdes, par une base ABCDLM qui se meut parallèlement à elle-même, de façon que ses angles A, B, etc., suivent des lignes perpendiculaires au plan de la base.

18.

Pour distinguer les différentes espèces des

prismes droits, on ajoute le nom du polygone qui leur sert de base. Le prisme hexagonal, par exemple, est celui dont la base est un hexagone.

19.

Pour trouver la manière de mesurer toutes sortes de prismes droits, on observera d'abord que de deux prismes droits dont les bases seraient égales, celui qui aurait une plus grande hauteur serait plus grand en solidité, dans la même raison que sa hauteur serait plus grande.

20.

On remarquera ensuite que deux prismes droits qui auraient la même hauteur, mais dont l'un aurait une base qui contiendrait un certain nombre de fois la base de l'autre, seraient entre eux dans la même raison que leurs bases. La vérité de cette proposition s'aperçoit facilement en faisant attention à la formation des prismes, expliquée dans l'article 17.

Que *abcdefghiklm* et ABCDEFGHIKLM soient les deux prismes qui ont la même hau- Fig. 112 et 113.

teur, et que la base *abcdlm* du plus petit soit, par exemple, le quart de la base ABCDLM. Puisque les deux prismes sont produits par les mouvemens de ces deux bases, il s'ensuit qu'un plan quelconque, qui sera parallèle au plan où sont les deux bases, coupera dans les deux prismes deux polygones dont chacun sera égal à la base du prisme où il sera coupé, c'est-à-dire que la section du grand prisme sera toujours quadruple de celle du petit; donc le prisme ABCDEFGHIKLM pourra être regardé comme composé de tranches toutes quadruples de celles du prisme *abcdefghiklm*, et par conséquent la solidité du premier prisme sera quadruple de celle du second.

21.

Après ces deux remarques, il ne sera pas difficile de former la règle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

On mesurera d'abord en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, etc., l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé par le nombre des pieds

ou des pouces, etc., que contiendra la hauteur du prisme, et le produit donnera le nombre des pieds cubes ou des pouces cubes, etc., contenus dans le prisme proposé, et sera, par conséquent, sa mesure.

22.

Le nom de *prisme* se donne encore aux solides qui ont deux bases polygones égales, ainsi que les précédens, mais dont les autres faces sont des parallélogrammes au lieu d'être des rectangles. Pour distinguer ces nouveaux prismes de ceux dont nous venons de parler, on les appelle des *prismes obliques*, par opposition aux autres qu'on avait nommés des *prismes droits*. Fig. 115.

23.

On conçoit les prismes obliques formés par une base *abcki* qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles *ag*, *bh*, *cd*, etc., qui s'élèvent hors du plan de la base, et qui ne lui sont point perpendiculaires. Fig. 115.

24.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits dont nous avons parlé (article 17), donne facilement la mesure de la solidité des prismes obliques; car si l'on imagine à côté d'un prisme oblique *abcdefghik*, un prisme droit ABCDEFGHIK qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Fig. 114 et 115.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur on fait passer un plan parallèle à la base, les sections NOPQR et *nopqr* que ce plan formera dans chacun des deux prismes pourront être regardées comme les bases égales ABCKI et *abcki*, arrivées en NOPQR et *nopqr* par le mouvement qui forme ces deux prismes, et ainsi ces deux sections seront des polygones égaux.

Or, si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par des mêmes plans coupans sont égales, il faudra que

les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire les prismes, soient égaux aussi.

On énonce ordinairement ainsi cette proposition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la *hauteur* du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'inférieur, ou sur son prolongement.

25.

Et comme les parallélépipèdes doivent être mis au nombre des prismes, on étendra ce que nous venons de dire des prismes aux parallélépipèdes obliques, c'est-à-dire aux figures... *abcdefgh*, produites en faisant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallélogramme, de manière que ses quatre angles suivent des lignes parallèles qui s'élèvent obliquement de la base. Ainsi, le parallélépipède oblique *abcdefgh* sera égal au parallélépipède droit ABCDEFGH, si la base *abgh* est la même, ou à la même superficie que la base ABGH, et si la perpendiculaire abaissée du plan *dcfe* sur le plan

Fig. 116 et 117.

abgh est égale à la perpendiculaire abaissée du plan DCFE sur le plan ABGH.

26.

Ayant vu ce qui concerne les parallélépipèdes et les prismes, examinons maintenant les pyramides, c'est-à-dire les corps tels que
Fig. 118. ABCDEFG, renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet A, et qui se terminent à une base polygone quelconque BCDEFG. Il est nécessaire de considérer ces sortes de solides, non-seulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens et dans les autres ouvrages à construire, mais parce que tous les solides terminés par des plans sont des assemblages de pyramides, ainsi que les figures rectilignes sont des assemblages de triangles. Il ne faut, pour s'en assurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra, dans l'intérieur du corps proposé, des lignes à tous les angles de ce corps.

27.

On distingue les pyramides les unes des au-

tres, ainsi que les prismes, par le nom de la figure qui leur sert de base.

28.

Lorsque la pyramide a pour base une figure régulière, et que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base, ainsi que dans la figure 118, la pyramide est alors appelée *pyramide droite*; elle est nommée, au contraire, *pyramide oblique*, lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre, ainsi que dans la figure 120.

29.

Pour découvrir la manière de mesurer toutes sortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire sur ces figures quelques réflexions générales, auxquelles on est conduit par la connaissance des propriétés des prismes.

Lorsqu'on fait attention à l'égalité des prismes qui ont même base et même hauteur, il est naturel qu'on se rappelle que les parallélogrammes sont aussi égaux entre eux lorsqu'ils

ont ces mêmes conditions, et qu'il en est encore de même des triangles. Ces trois vérités se présentant à la fois à l'esprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui sont communes aux parallélogrammes et aux triangles peuvent l'être aussi aux prismes et aux pyramides; on doit donc soupçonner que les pyramides qui ont même base et même hauteur ont la même solidité.

30.

Les réflexions suivantes confirmeront ce soupçon.

Fig. 119 et 120. Soient ABCDE et *abcde* deux pyramides dont les hauteurs AH et *ah* soient les mêmes, et dont les bases soient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE et *bcde*; si l'on conçoit que ces deux pyramides soient coupées par une infinité de plans parallèles à leurs bases, on imaginera sans peine que ces coupes de pyramides donneront des quarrés égaux IKLM et *iklm*, et par conséquent que les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui, dans ces deux pyramides, seront égales

chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même de part et d'autre, c'est-à-dire que les deux pyramides ont la même solidité.

Si les bases des deux pyramides étaient d'autres polygones réguliers ou irréguliers BCDEF et *bcdef*, égaux entre eux, il n'y a personne qui ne pensât encore que toutes les tranches IKLMN et *iklmn* de l'une et de l'autre de ces deux pyramides devraient être égales entre elles, et qui n'en conclût, par conséquent, que les pyramides auraient toujours la même solidité lorsqu'elles auraient même base et même hauteur. Fig. 121 et 122.

31.

Tout cela est aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée de l'égalité des prismes qui ont même hauteur; cependant la similitude entre la tranche quelconque... IKLMN d'une pyramide et la base BCDEF, et l'égalité des tranches IKLMN et *iklmn*, sont de ces propositions qui, quoique sensibles pour tout le monde, ont à la rigueur besoin d'une démonstration; or, pour trouver cette démons-

tration, on est obligé d'entrer dans plusieurs considérations sur la similitude des figures solides.

32.

Reprenons la pyramide ABCDEF, et supposons-la coupée par un plan IKLMN parallèle à la base; nous allons démontrer que la section ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide est un polygone parfaitement semblable au polygone BCDEF, et que la pyramide AIKLMN est elle-même entièrement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures sont respectivement égaux, et que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entre eux que ceux de la grande.

33.

Commençons par observer que si deux plans
Fig. 123. X et Y sont parallèles, et que deux lignes quelconques ALD et AME partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM et DE qui joindront les points L, M, D et E

seront parallèles. La raison en est que si ces deux lignes n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient quelque part, étant prolongées; mais si elles se rencontraient, les plans dans lesquels elles sont et dont elles ne peuvent pas sortir, en les prolongeant autant qu'il serait nécessaire, se rencontreraient donc aussi : donc ils ne seraient pas parallèles, ainsi qu'on le suppose.

34.

Si l'on suppose donc que le plan IKLMN soit parallèle au plan BCDEF, il s'ensuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN et NM, seront parallèles aux lignes ED, DC, CB, BF et FE, et par conséquent que les triangles ALM, AKL, AIK, etc., seront semblables aux triangles ADE, ACD, ABC, etc. Si l'on prend l'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour échelle, ou pour commune mesure de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correspondant AE servira d'échelle aux côtés de la grande, on verra sans peine que les côtés ML, LK, KI, etc., du polygone Fig. 121.

IKLMN seront proportionnels aux côtés ED, DC, CB, etc., du polygone BCDEF.

On verra aussi facilement que tous les angles IKL, KLM, etc., seront respectivement égaux aux angles BCD et CDE, puisque les premiers seront formés par des lignes parallèles aux côtés des seconds. Donc les deux polygones IKLMN et BCDEF seront semblables.

35.

Or les côtés AM, AL, AK, etc., étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, etc., et les angles ALM, ALK, etc., respectivement égaux aux angles ADE, ADC, etc., à cause de la ressemblance des triangles ALM, ADE, ALK, ADC, etc., les deux pyramides AIKLMN et ABCDEF seront entièrement semblables.

36.

Enfin, si du point A on mène AH perpendiculaire au plan sur lequel est construit le polygone BCDEF, et que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du po-

lygone IKLMN, il est clair que les droites AQ et AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN et ABCDEF, seront entre elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE, AL, AD, etc., ou, ce qui revient au même, que si l'on prend les hauteurs AQ et AH pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, etc., contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, etc., contiendront des parties de AH.

37.

Qu'on revienne maintenant à considérer les deux pyramides ABCDEF et *abcdef*, à la fois : on verra que les deux tranches IKLMN, *iklmn*, étant semblables aux bases BCDEF et *bcdef* qui sont les mêmes, elles seront semblables entre elles. On verra de plus que ces deux tranches seront égales entre elles, puisque les échelles de ces deux figures sont les droites égales AQ et *aq*, hauteurs des pyramides AIKLMN et *aiklmn*. Fig. 121 et 122.

Donc, sans connaître quelle est la solidité des pyramides, on sait déjà avec certitude que si elles ont même hauteur et même base,

elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (article 29).

38.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étaient seulement égales en superficie, les pyramides seraient encore égales
Fig. 122 et 124. en solidité. Car soient *abcdef* et *arst* deux pyramides qui ont la même hauteur *ah* : si l'on coupe ces deux pyramides par un plan quelconque parallèle à la base, il est évident qu'il y aura même rapport de l'aire *iklmn* à l'aire *bcdef* que de l'aire *uxy* à l'aire *rst*, puisque *iklmn* et *bcdef* étant (article 34) des figures semblables, elles ne diffèrent (Ire part., art. 48) que par leurs échelles *aq*, *ah*, etc., et que les figures *uxy* et *rst* étant aussi semblables, elles ne diffèrent non plus que par leurs échelles, qui sont encore les lignes *aq* et *ah*.

Mais si les bases *rst* et *bcdef* sont égales en superficie, leurs parties proportionnelles *uxy* et *iklmn* seront donc égales : donc toutes les tranches des deux pyramides *arst* et *abcdef* auront la même étendue ; donc leurs assem-

blages, c'est-à-dire les pyramides mêmes seront égales en solidité.

39.

Si la base *bcdef* de la première pyramide contenait un certain nombre de fois la base *rst*, la solidité de la première pyramide *abcdef*, contiendrait le même nombre de fois la solidité de la seconde *arst*.

Car en ce cas, la base *bcdef* étant divisée en plusieurs parties dont chacune fût égale à la base *rst*, on pourrait concevoir la pyramide *abcdef* comme composée de plusieurs autres pyramides qui auraient pour bases les parties de *bcdef*. Or chacune de ces nouvelles pyramides serait égale à la seconde pyramide *arst*, selon ce que nous avons prouvé dans l'article précédent : donc, etc.

Que si la base *rst* n'était pas contenue exactement dans la base *bcdef*, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviserait chacune des deux bases *bcdef* et *rst* en des parties égales à X, et l'on verrait que les deux pyramides *abcdef* et *arst* seraient composées d'autant de pyramides nouvelles toutes

égales entre elles, que les deux bases contiendraient de parties X : donc les pyramides *abcdef* et *arst* seraient entre elles comme leurs bases.

Et si les bases étaient incommensurables, on ferait toujours voir, malgré cela, que les pyramides seraient entre elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle que l'on a employée dans un pareil cas (IIe part., art. 28) lorsqu'il s'agissait de comparer les figures dont les côtés étaient incommensurables; c'est-à-dire que l'on diminuerait à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base *rst* que de la base *bcdef*.

40.

Ayant découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité ne renferme plus que très peu de difficulté.

Car il ne s'agit plus que de savoir mesurer une seule pyramide, pour mesurer toutes les autres. Supposons, par exemple, que nous sa-

chions mesurer la pyramide ABCDE, et que l'on nous demande la mesure de la pyramide ASTVXY, qui n'a ni la même base ni la même hauteur que la première; nous commencerons par faire une pyramide semblable à la pyramide ABCDE, et qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui sera bien aisé; car il suffira (article 35) de prolonger les côtés AB, AC, AD et AE et de les couper par le plan LMNO, dont la distance AG au sommet A soit égale à la hauteur AO. Fig. 125 et 126.

Cela fait, puisque, par la supposition, nous savons mesurer la pyramide ABCDE, il est évident que nous saurons mesurer aussi la pyramide ALMNO qui lui est semblable; car quelles que soient les opérations par lesquelles on mesure la pyramide ABCDE, on pourra toujours faire les mêmes opérations pour mesurer la pyramide semblable ALMNO, à cela près que l'on emploiera dans celle-ci une échelle différente.

Supposons donc que la pyramide ALMNO soit mesurée, sa mesure déterminera aussi celle de la pyramide proposée ASTVXY; car, par l'article précédent, ces deux pyramides sont

entre elles comme leurs bases LMNO et STVXY, et nous avons d'ailleurs enseigné dans la seconde partie à trouver le rapport de ces deux bases.

41.

Puisqu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide pour savoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous-en une extrêmement simple, que l'on peut for-
Fig. 127. mer en tirant des quatre angles A, B, C et H d'une des faces d'un cube ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube; c'est-à-dire le point également distant de A, D, B, E, etc.

On voit sans peine que cette pyramide est la sixième partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles en prenant chaque face pour base. Or, la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH; donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la sixième partie de la hauteur AF par la base ABCH; et comme la sixième partie de la hauteur AF est le tiers

de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

42.

Supposons présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV. On imaginera un cube dont le côté AB ou AF soit double de la hauteur OL de la pyramide proposée, et l'on concevra dans ce cube une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, et qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la première, et par conséquent (article 39) la solidité de OABCH sera à celle de OKMNSTV comme la base ABCH à la base KMNSTV : or, par l'article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH est la valeur de la pyramide OABCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV sera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV. Fig. 127 et 128.

Et par là on découvre ce théorème général,

qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

43.

Comme nous avons vu (article 21) que la solidité d'un prisme est le produit de sa base par sa hauteur, il est clair, par l'article précédent, que les pyramides seront toujours le tiers des prismes qui auront même base et même hauteur.

44.

Après avoir mesuré tous les solides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir suivi pour mesurer les solides dont les surfaces sont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troisième partie que des figures dont les contours ne renferment d'autres courbes que le cercle, nous n'examinerons que les corps dont les courbures sont circulaires.

Dans l'examen de ces corps nous aurons deux objets, la mesure de leurs surfaces et celle de leurs solidités ; car ces surfaces étant, ou entiè-

rement courbes, ou en partie planes et en partie courbes, nous ne pourrons renvoyer leur mesure à la première partie, ainsi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

45.

Le plus simple de tous les solides courbes est le cylindre : c'est un corps comme ABCDEF, dont les deux bases ABC et DEF sont deux cercles égaux et parallèles, joints par une surface courbe qu'on peut imaginer formée par un plan plié autour de leurs circonférences. Pl. VII, fig. 129 et 130.

Lorsque les deux cercles sont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-dessus du centre H du second, le cylindre se nomme *droit*. Fig 129.

Le cylindre se nomme au contraire *oblique*, lorsque la ligne tirée par les deux centres G et H est oblique à l'égard des plans ABC et DEF. Fig. 130.

46.

La formation géométrique de ces solides, analogue à celle des prismes et des parallélépi-

pèdes dont il a été parlé (article 17), consiste à faire mouvoir un cercle parallèlement à lui-même, en sorte que tous ses points décrivent des lignes droites parallèles qui s'élèvent hors du plan de ce cercle.

47.

On parviendra, de la manière suivante, à mesurer la surface d'un cylindre droit; ce qui est souvent nécessaire dans la pratique.

Fig. 129. Les deux circonférences ABC et DEF étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de division répondant les uns au-dessus des autres, qu'on tire des lignes droites qui joignent les angles correspondans des deux polygones réguliers que donne cette opération, il est clair qu'on aura alors un prisme dont la superficie sera composée d'autant de rectangles renfermés dans la surface du cylindre, qu'il y a de côtés renfermés dans chacune des circonférences ABC et DEF. Or, tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD, leur mesure totale sera le produit de la hauteur AD par la somme de toutes les bases,

c'est-à-dire par le contour du polygone renfermé ou inscrit dans le cercle DEF ou ABC.

Mais comme à mesure que le nombre des côtés de ce polygone sera plus grand, le contour du polygone approchera de plus en plus d'être égal à la circonférence, et la surface du prisme d'être égale à celle du cylindre, il s'ensuit que si l'on imagine que le nombre des côtés de ce polygone devienne infini, le prisme ne différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur serait AD, et la base une ligne droite égale à la circonférence DEF.

Cette proposition peut servir à trouver, par exemple, ce qu'il faudrait d'étoffe pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une tour ronde.

48.

Quant à la surface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même manière, parce qu'au lieu de rectangles on aurait des parallélogrammes de hauteurs différentes. Ce n'est que par des méthodes très compliquées et très

difficiles qu'on est parvenu à connaître seulement la valeur approchée de cette surface, et les problèmes de ce genre ne sont pas du ressort des Élémens.

49.

A l'égard de la solidité des cylindres, soit droits, soit obliques, rien ne sera plus aisé que de la trouver; car il est évident que tout ce que nous avons dit des prismes conviendra aux cylindres, si l'on regarde les cylindres comme les derniers des prismes qu'on peut leur inscrire.

Ainsi, les cylindres qui auront même base et même hauteur seront égaux en solidité.

50.

Et la mesure d'un cylindre quelconque consistera dans le produit de sa base par sa hauteur.

51.

Le cône est le solide courbe le plus simple après le cylindre : c'est une figure comme... ABCDE, dont la base est un cercle et dont la

Fig. 131 et 132.

surface est composée d'une infinité de lignes droites qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base serait un cercle.

52.

Si, comme dans la figure 131, la pointe ou sommet A du cône répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cône est nommé *cône droit;* et il est nommé *oblique,* si le sommet répond à un point différent du centre de la base, ainsi que dans la figure 132.

53.

Pour mesurer la surface d'un cône droit ABCDE, on le regardera comme la dernière des pyramides qu'on peut lui inscrire, c'est-à-dire qu'on divisera la circonférence de sa base BCDE, ainsi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de petits côtés; et, tirant des lignes de tous les angles au sommet du cône A, on trouvera que la superficie conique Fig. 131.

est un assemblage d'une infinité de petits triangles isocèles, dont la hauteur est égale au côté AB du cône, et dont toutes les bases ajoutées ensemble sont égales à la circonférence BCDE; d'où il est aisé de voir que la mesure de cette surface se trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

54.

Si l'on se rappelle maintenant que la surface d'un secteur de cercle est (IIIe part., art. 10) égale au produit de l'arc de ce secteur par la moitié du rayon, on verra que pour envelopper
Fig. 131 et 135. le cône droit ABCDE d'une surface pliante, comme du carton, etc., il faudrait prendre un secteur de cercle ALR dont le rayon fût égal à AB, et dont l'arc fût égal à la circonférence BCDE.

55.

Lorsque le cône est oblique, la mesure de sa surface, ainsi que celle du cylindre oblique, est fort difficile à connaître, même d'une manière

approchée, et c'est encore un problème au-dessus des Élémens.

56.

Quant à la solidité des cônes, soit droits, soit obliques, on les regardera comme les dernières des pyramides qu'on pourrait leur inscrire, et l'on pourra leur appliquer en conséquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainsi, les cônes qui auront même base et même hauteur seront égaux.

57.

Et la solidité d'un cône quelconque sera le produit de la base par le tiers de sa hauteur.

58.

On a quelquefois besoin de mesurer un corps comme BCDEFGH, qu'on appelle *cône tronqué* : c'est la partie qui reste d'un cône AFGH, lorsqu'on en a retranché un autre cône plus petit ABCDE par une section parallèle à la base Fig. 133 et 134.

FGH. Il est évident que la mesure de ce solide sera la différence entre les solidités des deux cônes ABCDE et AFGH.

59.

Quant à la surface d'un cône tronqué, s'il a été formé par la section d'un cône droit, on peut trouver quelque chose de plus simple que de mesurer séparément les surfaces de deux cônes, et de retrancher l'une de l'autre; on emploiera pour cela la méthode suivante, qui est aisée à imaginer après ce que nous avons dit (article 54).

Fig. 134 et 135. Supposons que ALR soit le secteur qu'il faudrait construire pour pouvoir envelopper le cône AFGH. En décrivant du centre A et de l'intervalle AM égal à AB un arc MP, il est clair que l'espace MPRL serait une portion de couronne propre à envelopper la surface cherchée du cône tronqué. Or, si l'on imagine que les deux circonférences, dont MP et LR sont des arcs semblables, soient achevées, on aura une couronne entière dont la mesure (IIIe part., art. 8) sera le produit de ML égale à BF, par la

circonférence dont AN est le rayon, N étant le milieu de ML; donc la portion de couronne MPRL, ou la surface du cône tronqué BCDEFGH qui lui est égale, se mesurera en multipliant ML par l'arc NQ, ou, ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL de la section du solide proposé, coupé par un plan parallèle à la base, et qui passe par le milieu I du côté BF.

60.

Le dernier des corps solides dont nous traiterons se nomme *sphère* ou *globe;* c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui en est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface. On voudra savoir, par exemple, ce qu'il faudrait de dorure pour une boule, combien on devrait prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, etc.

61.

Soit X la sphère dont on veut mesurer la superficie; il est évident que l'on peut concevoir Fig. 136.

ce solide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB autour de son diamètre AB.

Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un polygone régulier d'un nombre infini de petits côtés, ou, si l'on veut, d'un très grand nombre de côtés, et pro-
Fig 137. posons-nous seulement de mesurer la surface Z, produite par la révolution de ce polygone. Il sera facile de passer ensuite de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphère, ainsi que nous avons passé de la mesure des figures rectilignes à celle du cercle.

62.

Pour mesurer la surface du solide Z, examinons la petite partie de cette surface que produit un seul côté quelconque M*m* du polygone inscrit, pendant qu'il tourne autour du diamètre
Fig. 138. AB. Il est évident que ce côté M*m* décrit dans ce mouvement une surface de cône tronqué V; car en prolongeant la droite *m*M jusqu'à ce qu'elle rencontre en T le diamètre ou axe de révolution AB, si cette ligne TM*m* tourne en

même temps que le demi-cercle AMB, elle décrira visiblement un cône droit, dont le sommet sera T, et la base le cercle décrit par le point *m*; en sorte que la surface V produite par le mouvement de M*m* sera une tranche de ce cône, enfermée entre les plans des cercles que les points M et *m* décrivent en tournant. Mais, selon que nous l'avons vu (article 59) la surface V est égale à un rectangle dont M*m* est la hauteur, et la base une ligne égale à la circonférence KLO décrite par le point K, milieu de M*m* : donc la surface produite par la révolution du polygone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature qu'il y a de côtés dans ce polygone, tels que M*m*.

Or, comme tous les côtés M*m*, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourrait regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui aurait la hauteur M*m* avec une base égale à la somme de toutes les circonférences telles que KLO, c'est-à-dire décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le polygone inscrit dans le demi-cercle AMB ayant un très grand nombre de côtés, la petitesse de la hauteur M*m*, et la grandeur

excessive de la base, rendent ce rectangle inconstructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il est bien aisé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auraient toujours une même hauteur, non pas imperceptible comme M*m*, mais assez grande pour que chacune des bases devînt fort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites bases ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

63.

Voyons donc si nous ne pourrons point changer de cette sorte nos petits rectangles. Supposons d'abord, pour simplifier le problème, Fig. 139. que nos rectangles, au lieu d'avoir pour bases des lignes égales aux circonférences KL, n'aient pour base que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous sera pas difficile ensuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui

ait pour mesure le produit de M*m* par KI, et qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que M*m*, et qui soit la même en quelque endroit que soit placé ce petit côté M*m*. Choisissons, par exemple, la droite CK, qui est l'apothème du polygone dont M*m* est le côté, et qui par conséquent est toujours la même à quelque côté du polygone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK soit égal au produit de KI par M*m*, c'est-à-dire (IIe part., art. 7) qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes CK, KI, et M*m*. Or nous savons que c'est par le moyen des triangles semblables que l'on découvre des lignes proportionnelles à d'autres lignes; il faut donc former des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les lignes en question: c'est ce que l'on fera en abaissant MR perpendiculaire à *mp*. On aura alors les triangles M*m*R et KIC qui seront semblables; car ils seront chacun rectangle, l'un en R, l'autre en I, et de plus ils auront les angles *m*MR et IKC égaux entre eux, à cause que le premier fait un angle droit avec l'angle M*m*R, égal à l'angle

MKI, et que l'autre IKC fait aussi un angle droit avec MKI.

De là on peut conclure facilement que CK est à KI comme M*m* à MR; c'est-à-dire que MR est la quatrième proportionnelle cherchée, ou, ce qui revient au même, que le rectangle de CK par MR ou par P*p* est égal au rectangle de M*m* par KI.

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposé de changer n'était pas celui de M*m* par KI, que c'était celui de M*m* par la circonférence dont KI est le rayon, nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entre elles comme les rayons, ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de M*m* par KI et celui de P*p* par CK entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de M*m* par la circonférence de KI au rectangle de P*p* par la circonférence de CK. Car on voit facilement que si deux rectangles sont égaux, et que, conservant leur hauteurs, on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

64.

Ayant découvert, dans les deux articles précédens, que toutes les petites surfaces coniques tronquées, telles que V (fig. 138.), sont égales à autant de rectangles qui auraient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence dont CK serait le rayon, et dont chacun aurait pour base une petite droite P*p* correspondante à chaque côté M*m*, on en déduira qu'une somme quelconque de ces petites surfaces, prise par exemple depuis A jusqu'en *p*, sera égale à un rectangle qui aurait pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, et pour base la somme de toutes les lignes telles que P*p*, prise depuis A jusqu'en *p*, c'est-à-dire la droite A*p*.

Donc pour avoir la surface totale produite par la révolution du polygone entier, il faudra faire un rectangle dont la base soit égale à la circonférence décrite du rayon CK, et qui ait une hauteur égale au diamètre AB.

65.

Il est bien aisé maintenant de mesurer la sur-

face de la sphère : car il est clair que plus il y aura de côtés dans le polygone, plus le solide produit par sa révolution approchera d'être égal à la sphère, et plus aussi l'apothème CK approchera d'être égal au rayon ; en sorte que si l'on peut imaginer que le polygone soit devenu un cercle, l'apothème CK sera le rayon même, et la surface de la sphère aura la même étendue qu'un rectangle dont la hauteur et la base seraient, l'une le diamètre, et l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, et que l'on appelle ordinairement le *grand cercle de la sphère*.

66.

Quant à la surface courbe d'un segment de
Fig. 140. sphère AMLNO, c'est-à-dire de la partie que l'on retranche d'une sphère lorsqu'on la coupe par un plan MLNO perpendiculaire au diamètre, elle a pour mesure le produit de son épaisseur ou flèche AP par la circonférence du grand cercle AMBN. La raison en est la même que celle par laquelle on a prouvé (article 64.) que la somme des surfaces de tous les petits

cônes tronqués, compris depuis A jusqu'en *m*, Fig. 139.
est égale au rectangle dont la hauteur est A*p*, et la base une ligne égale à la circonférence dont CK est le rayon.

67.

La mesure précédente de la surface de la sphère apprend que si l'on fait tourner le rectangle ABDE en même temps que le demi-cercle AMNB autour de AB, la surface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, sera égale à celle de la sphère décrite par le demi-cercle, ce qu'on exprime ordinairement ainsi : la surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit. Fig. 141.

68.

Et si l'on coupe, tant le cylindre que la sphère, par deux plans quelconques perpendiculaires au diamètre AB en P et en Q, les tranches du cylindre et de la sphère qui seront produites par le mouvement de la droite OS et de l'arc MN seront égales en superficie.

69.

On voit encore, par ce qui précède, que la surface de la sphère est égale à quatre fois l'aire de son grand cercle; car la surface de ce grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamètre par la circonférence, et la superficie de la sphère est égale au produit du diamètre entier par la même circonférence.

70.

La mesure de la surface de la sphère étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité; car on peut considérer la sphère comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides dont les sommets sont à son centre, et dont toutes les bases couvrent la surface entière. Or, chacune de ces pyramides ayant pour mesure le produit du tiers de sa hauteur, c'est-à-dire du rayon, par sa base, leur somme totale ou la solidité de la sphère se mesurera en multipliant le tiers du rayon par sa surface, c'est-à-dire par quatre fois l'aire du grand cercle.

71.

Comme le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle est la même chose que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'est-à-dire des deux tiers du diamètre, par le grand cercle, et que la solidité du cylindre EFGIKDH a pour mesure le produit du diamètre par le même grand cercle qui lui sert de base, il s'ensuit que la solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

72.

Si l'on se proposait de mesurer la solidité d'un segment de sphère AMLNO, il est évi- Fig. 140.
dent qu'il faudrait d'abord mesurer la portion de sphère produite par la révolution du secteur CAM; ce qui se ferait en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphère proposé AMLNO, ensuite on retrancherait de cette mesure celle du cône produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire le cône dont la base est le cercle MLNO et CP la hauteur, et le reste serait la valeur demandée du segment.

73.

Nous finirons ces Élémens par quelques propositions sur la solidité et sur la superficie des corps semblables. Ces propositions se présentent fort naturellement lorsqu'on réfléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guère manquer de les découvrir par analogie, si l'on se rappelle ce que nous avons dit (Ire part., art. 34 et suiv.) de la similitude des figures planes, c'est-à-dire de celles qui sont décrites sur des plans.

Nous avons déterminé (article 32) en quoi consiste la similitude de deux pyramides; la définition que nous avons donnée alors des pyramides semblables peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans, c'est-à-dire que deux corps de cette nature seront appelés *semblables*, si tous les angles formés par les côtés du premier sont les mêmes que les angles formés par les côtés du second, et si les côtés d'un de ces corps sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

74.

Quant aux corps qui ne sont pas terminés de tous les côtés par des plans, par exemple, les cylindres et les cônes, il est aussi facile de déterminer les conditions nécessaires pour les rendre semblables.

Deux cylindres droits seront semblables, si leurs hauteurs sont en même raison que les rayons de leurs bases.

75.

Si les cylindres sont obliques, il faudra de plus que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, fassent les mêmes angles sur les plans de leurs bases.

76.

Les mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cônes, en mettant, au lieu de la ligne qui passe par les centres des deux bases du cy-

lindre, celle qui va du sommet du cône au centre du cercle qui lui sert de base.

77.

Pour que deux cônes tronqués soient semblables, il faut, en premier lieu, que les cônes dont ils sont portions soient semblables l'un à l'autre; et en second lieu, que leurs hauteurs soient entre elles comme les rayons de leurs bases.

78.

A l'égard des sphères, on voit bien qu'elles sont toutes semblables les unes aux autres, ainsi que toutes les figures, soit solides, soit planes, qui n'ont besoin que d'une seule ligne pour être déterminées, comme le cercle, le quarré, le triangle équilatéral, le cube, le cylindre circonscrit à la sphère, etc.

79.

En général, on pourra dire des figures solides semblables, comme on l'a dit des figures

planes, qu'elles ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles elles ont été construites.

Cet exposé seul bien considéré, conduit à deux propositions fondamentales sur la superficie et sur la solidité des corps semblables.

80.

La première proposition apprend que les surfaces de deux solides semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les surfaces des deux pyramides semblablables *z* et Z, qu'entre les quarrés *abcd* et ABCD, faits sur les côtés *ab* et AB, qui se répondent dans ces deux pyramides. Fig. 142 et 143.

Pour découvrir cette proposition, on n'a besoin que des raisonnemens qu'on a employés (Ire part., art. 43 et 44), c'est-à-dire qu'il faut seulement considérer que si P est l'échelle de la pyramide Z, et *p* l'échelle de la pyramide semblable *z*, les lignes qu'il faudra employer pour mesurer la surface de Z et celle du quarré ABCD, auront le même nombre de P, qu'il y aura de parties *p* dans celles qu'il faut employer

pour mesurer la surface de *z*, et celle du quarré *abcd*.

Car de là il suit que le produit des lignes qui entrent dans la mesure de Z et de ABCD donnera le même nombre de quarrés X faits sur P, que le produit des lignes employées à mesurer *z* et *abcd* donnera de quarrés *x* faits sur *p*; c'est-à-dire que les nombres qui exprimeront le rapport de la surface de la pyramide Z au quarré ABCD seront les mêmes que ceux qui exprimeront le rapport de la surface *z* au quarré *abcd*.

On ferait le même raisonnement dans la comparaison de tous les autres corps semblables, soit que ces corps fussent terminés par des plans, soit qu'ils fussent terminés par des surfaces courbes; car les lignes employées à mesurer les superficies de tous ces corps auront toujours le même nombre des parties de leurs échelles, et par conséquent les produits de ces lignes contiendront un même nombre de fois les quarrés de ces mêmes parties.

Et si les lignes nécessaires pour mesurer la superficie des corps semblables étaient incommensurables, il est clair que la démonstration

subsisterait toujours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'est servi (IIe part., art. 28) pour comparer les figures semblables dont les côtés étaient incommensurables.

81.

On prouverait, de la même façon, que les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre manière, il suffira de se rappeler que les surfaces des cercles sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons (IIIe part., art. 6), et que les surfaces des sphères sont quadruples de leurs grands cercles (article 69).

82.

La proportionnalité entre les surfaces des corps semblables et les quarrés de leurs côtés homologues est si générale, qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne sait pas mesurer qu'à ceux dont on connaît la mesure.

Sans savoir mesurer, par exemple, la surface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les

surfaces de deux cylindres obliques semblables sont entre elles comme les quarrés des diamètres des bases de ces cylindres : car en inscrivant dans ces deux cylindres deux prismes semblables, de tant de faces qu'on voudra, on verra, par ce qui précède, que les surfaces de ces prismes seront entre elles comme les quarrés des diamètres des bases. Donc les cylindres mêmes, considérés comme les derniers des prismes inscrits, auront leurs surfaces dans le même rapport.

83.

La proposition fondamentale pour la comparaison de la solidité des corps semblables est celle-ci :

Les solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Cette proposition se peut démontrer comme la précédente, en considérant que les figures semblables ne diffèrent que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

Fig. 144 et 145. Pour le faire voir le plus simplement qu'il nous sera possible, nous nous servirons, par exemple, des deux prismes semblables Z et z,

et des deux cubes X et x, dont les côtés sont égaux à AB et ab, lignes analogues dans ces deux prismes; et nous prendrons de plus deux échelles AB et ab, divisées en un assez grand nombre de parties pour pouvoir mesurer les dimensions de ces solides. Or, cela posé, il est clair qu'il se trouvera pareillement autant de cubes faits sur les parties de ab dans le prisme z et dans le cube x, que de cubes faits sur les parties de AB dans le prisme Z et dans le cube X.

On ferait le même raisonnement pour tous les autres solides; et ceux qui pourraient avoir des dimensions incommensurables seraient aussi dans la même raison que les cubes de leurs côtés homologues.

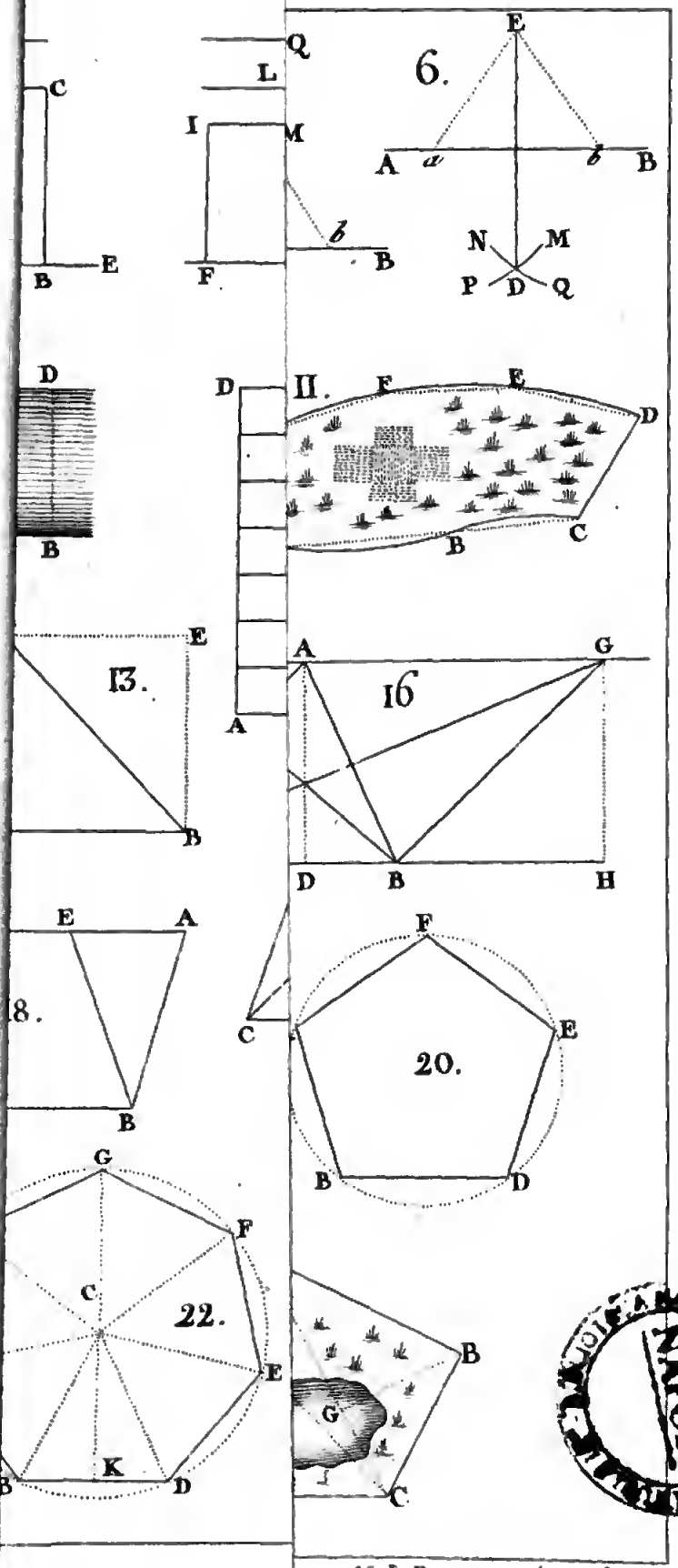
84.

Les solidités des sphères, par exemple, sont évidemment entre elles comme les cubes de leurs rayons.

FIN.

608161

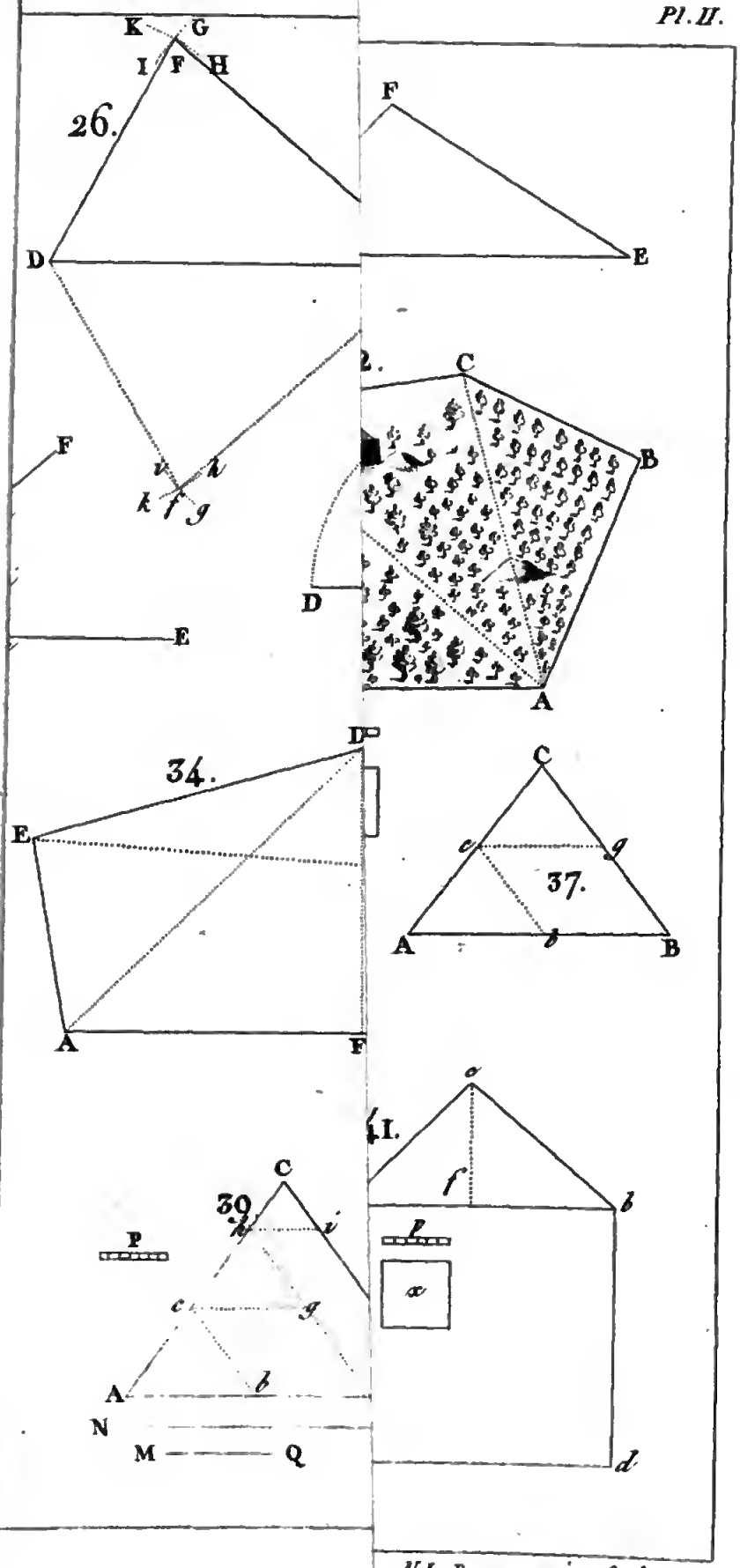
Digitized by Google



N. L. Rousseau père Sculp.

NAPOLI

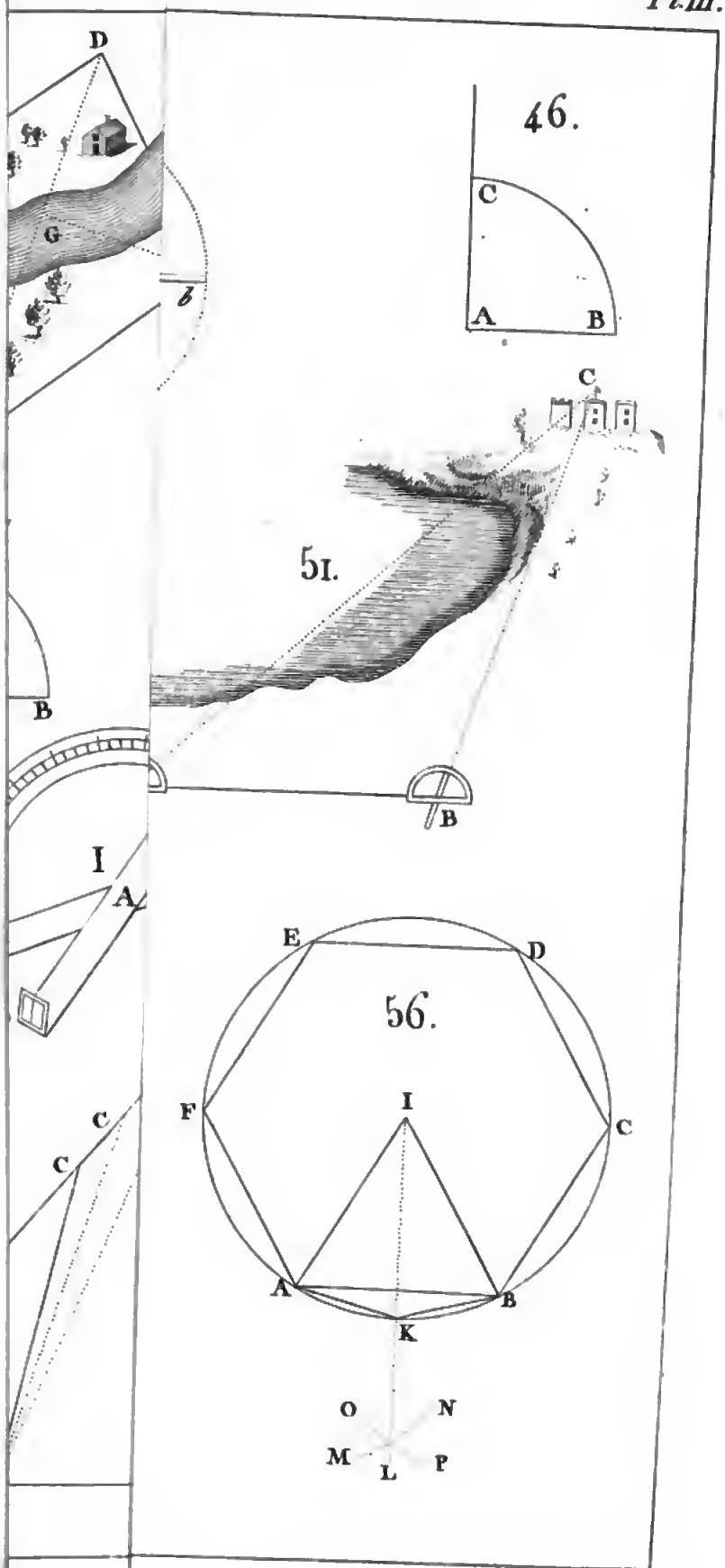
Digitized by Google



N.L. Rousseau pere Sculp.

Digitized by Google

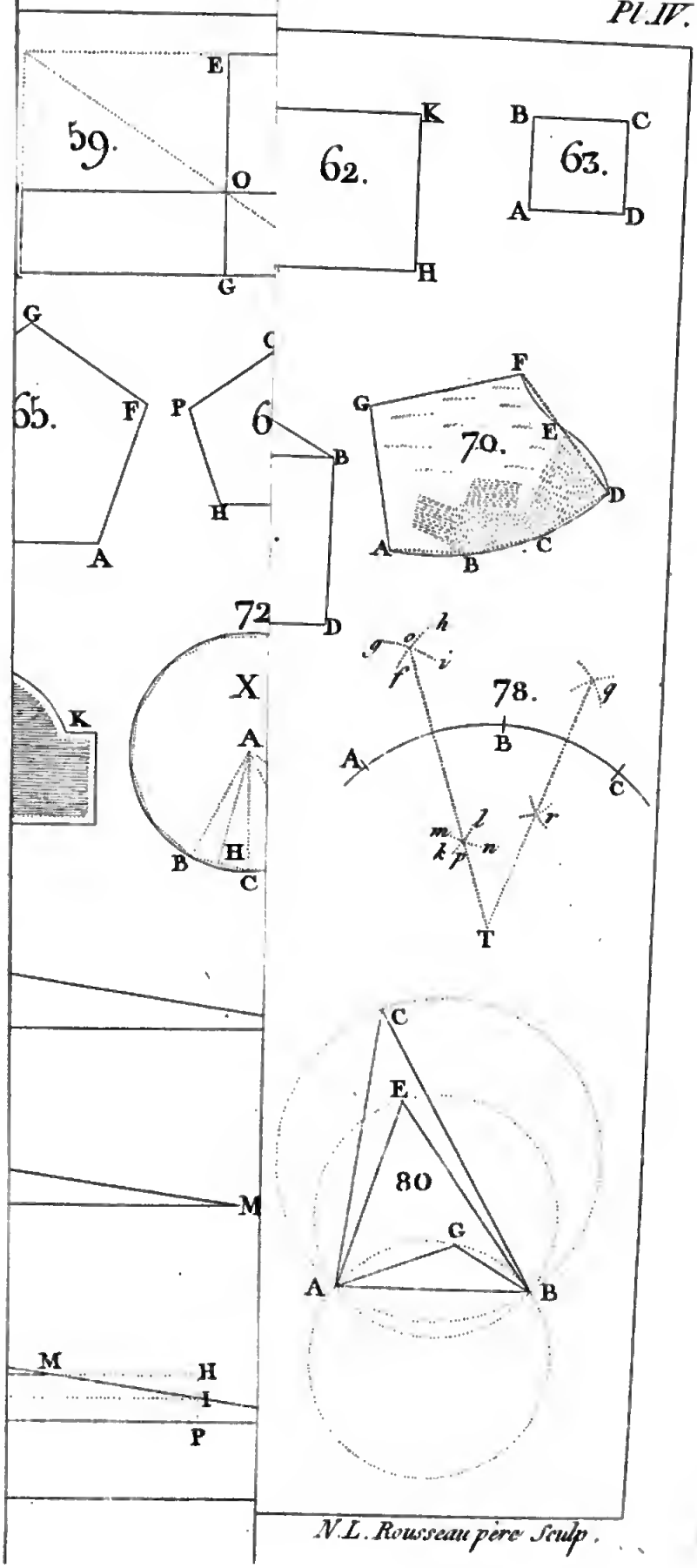
Digitized by Google



N.L. Rousseau père Sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google

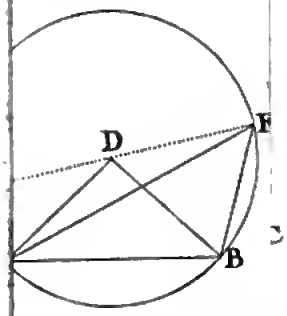


N.L. Rousseau père Sculp.

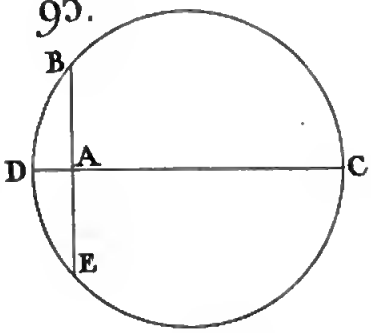
Digitized by Google

Digitized by Google

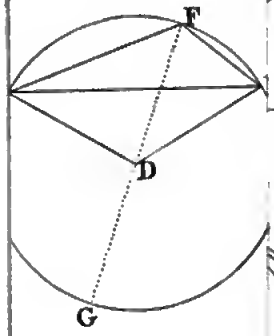
85.

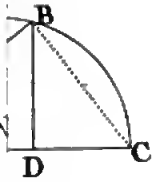


95.

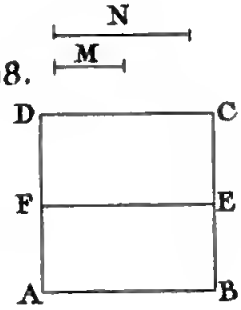


86.

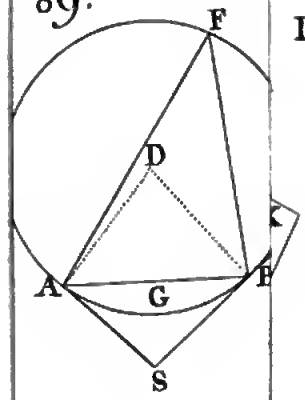




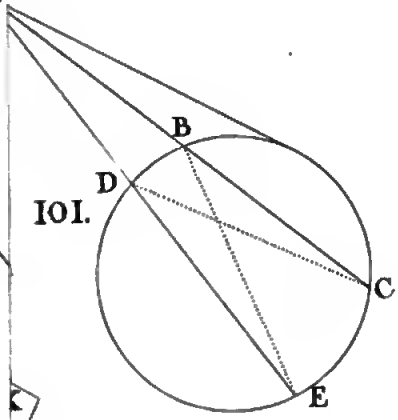
98.

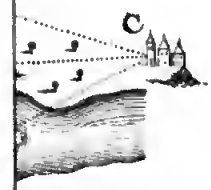


89.

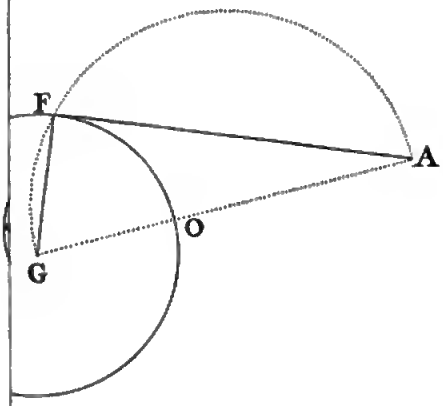


101.





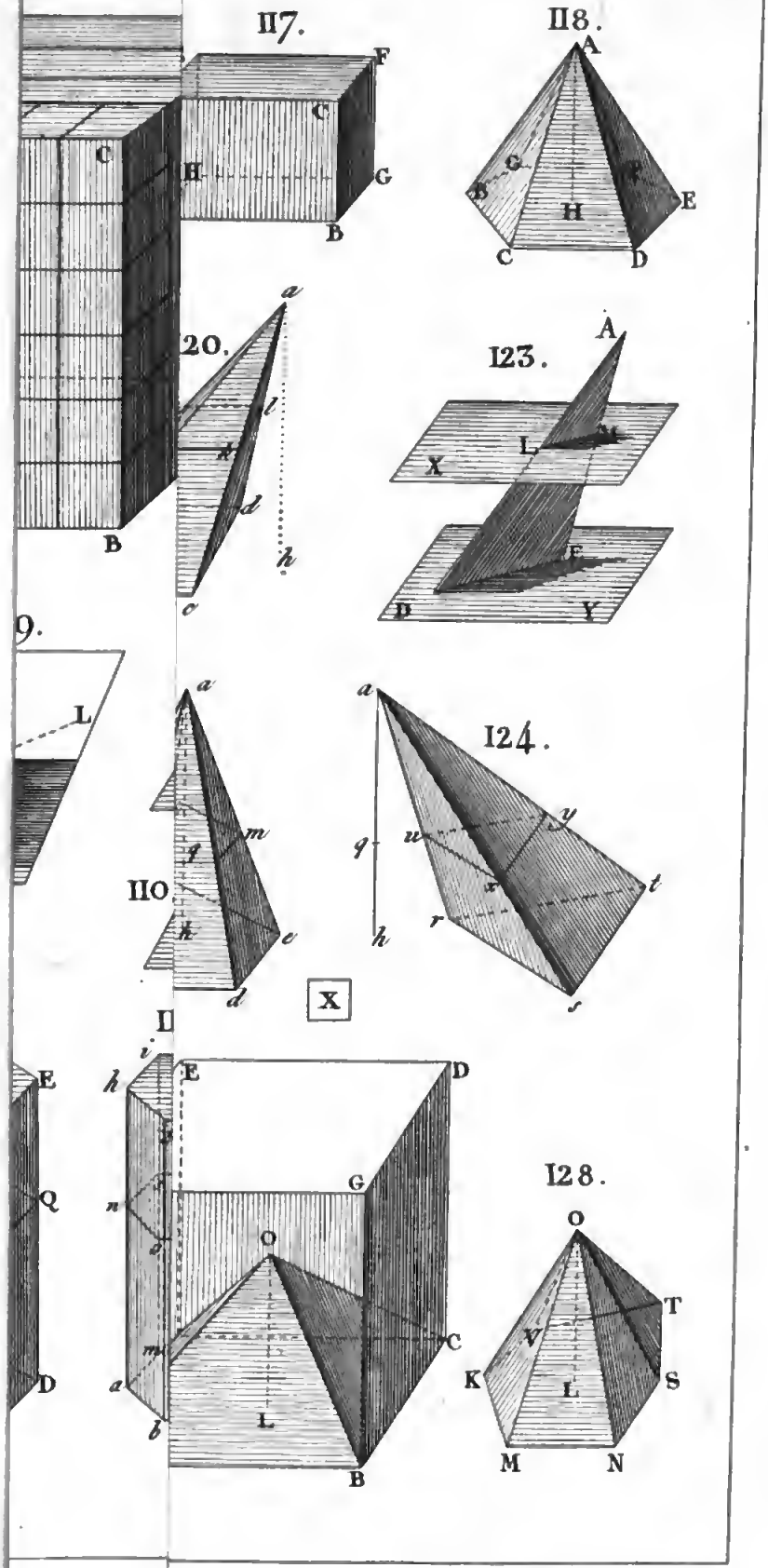
102.



N.L. Rousseau père Sculp.

Digitized by Google

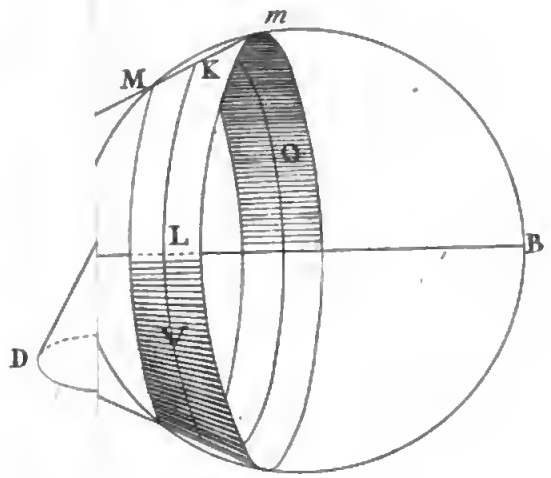
Digitized by Google

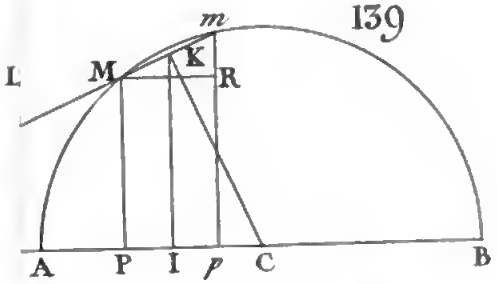


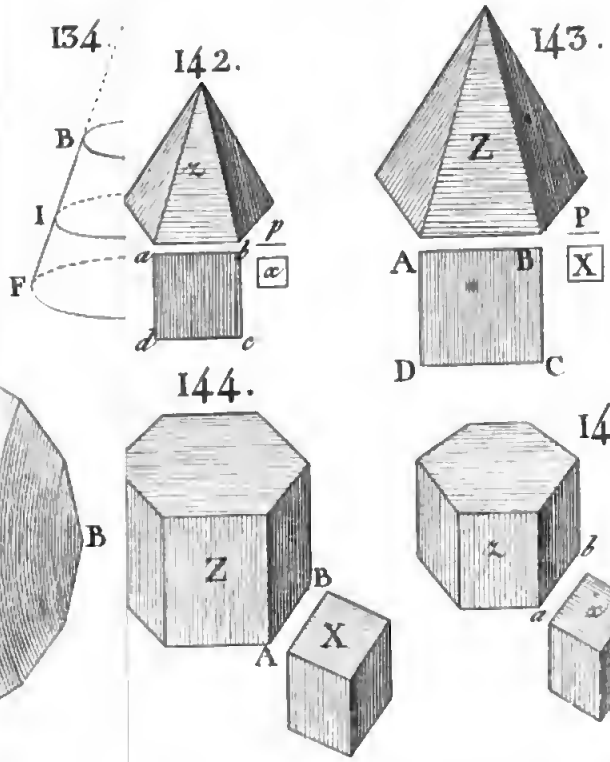
N.L. Rousseau père Sculp.

Digitized by Google

Digitized by Google







N. L. Rousseau pere Sculp

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA